ISSN 2224-7580

МЕТАФИЗИКА

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

В этом номере:

- Метафизика бесконечности
- Метафизические вопросы математики
- Метаматематика и теория относительности
- Из наследия прошлого

2015, № 3 (17)

МЕТАФИЗИКА

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

2015, № 3 (17)

Основан в 2011 г.
Выходит 4 раза в год

- **МЕТАФИЗИКА БЕСКОНЕЧНОСТИ**
- **МЕТАФИЗИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ МАТЕМАТИКИ**
- **МЕТАМАТЕМАТИКА И ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ**
- **ИЗ НАСЛЕДИЯ ПРОШЛОГО**

METAFIZIKA

(Metaphysics)

Founder:
Peoples' Friendship University of Russia

SCIENTIFIC JOURNAL

No. 3 (17), 2015

Established in 2011
Appears 4 times a year

ISSN 2224-7580

# МЕТАФИЗИКА НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

2015, № 3 (17)

Учредитель:
Российский университет дружбы народов

Основан в 2011 г.
Выходит 4 раза в год

ISSN 2224-7580

CONTENTS

СОДЕРЖАНИЕ

ОТ РЕДАКЦИИ

Метафизическая составляющая жизненно важна для любой научной дисциплины. Именно на метафизическом поле можно формулировать и обсуждать идеи, которые структурируют дисциплину и направляют её развитие. В работах классиков естествознания и математики предметная и метафизическая составляющая, как правило, шли рука об руку. «Я занимаюсь анализом анализа» – сформулировал Э. Галуа свой метафизический принцип, возникший в процессе поиска критерия разрешимости алгебраического уравнения в радикалах. Как известно, реализация этого принципа дала теорию групп.

К сожалению, в XX в., метафизическая сторона собственно математической деятельности стала постепенно блекнуть. Роль универсальной метафизики перешла к теории множеств. Попытки покинуть поле её притяжения лишь усиливали влияние этой концепции. «Никто не может изгнать нас из рая, созданного Кантором», – говорил по этому поводу Д. Гильберт.

Причина исключительного положения теории множеств в современной математике определяется тем, что только теория множеств сформулировала позитивную теорию актуальной бесконечности. Такая бесконечность вышла за рамки неограниченного процесса и не растворилась в неопределенной «не–конечной» сущности. Теория множеств сделала бесконечность математическим объектом и, как следствие, предложила целый спектр «оттенков» этого объекта.

Бесконечность – ключевая идея метафизики математики, и в данном выпуске ей посвящен специальный, первый раздел, содержащий три статьи. К этой тематике относится также статья чешского математика Петра Вопенки в традиционном для нашего журнала разделе «Из наследия прошлого».

В статье С.А. Векшенова прослеживается рождение и развитие идеи бесконечности вплоть до работ современных математиков. Подчеркивается факт, что в последние десятилетия идет интенсивное осмысление идеи бесконечности с самых различных точек зрения. Одна из них представлена в статье П. Вопенки.

В статье С.Я. Серовайского также обсуждается вопрос генезиса идеи бесконечного с акцентом на развитие аналитической и геометрической сторон этой идеи.

В работе В.Н. Катасонова «Информация и реальность» идея бесконечности рассматривается в контексте другого фундаментального понятия современной науки – понятия информации.

Разумеется, идеей бесконечности метафизика математики не ограничивается (здесь уместно было бы употребить термин «метаматематика», но это слово, по выражению М.М. Бахтина, уже оказывается «населенным». На сегодняшний день Метаматематика – это вполне сложившаяся математическая дисциплина, которая тоже имеет свою «метафизику»).

Во втором разделе данного выпуска рассматривается ряд метафизических вопросов современной математики. Здесь особо выделена проблема, которую Ю.П. Вигнер сформулировал как «непостижимую эффективность математики» в физике. Обсуждению ее возможных истоков и идей на этот счет посвящена статья В.Я Перминова «Предустановленная гармония во взаимодействии математики и физики». Близкие вопросы затронуты в статьях В.А. Яковлева и А.В. Коганова.

В статье Г.Г. Михайличенко подробно обсуждены ключевые положения математического аппарата так называемой теории физических структур, который представляет собой универсальную алгебраическую теорию систем отношений. Отсутствие подобной теории долгое время сдерживало развитие исследований в рамках реляционной метафизической парадигмы в физике, идеи которой были сформулированы в трудах Г. Лейбница, Э. Маха и ряда других мыслителей. Основы необходимого математического аппарата были заложены в конце 1960-х гг. в работах Ю.И. Кулакова и были одобрены академиком И.Е. Таммом.

Отдельно выделен раздел «Метаматематика и теория относительности», в котором показана роль метафизических идей, лежащих на стыке математики и физики, в создании как специальной, так и общей теории относительности. Исключительно глубоко понимал эту метафизику В.И. Арнольд. Редакция сочла целесообразным воспроизвести фрагмент неизданных размышлений этого великого математика и метафизика.

В статье Вл.П. Визгина продемонстрирована роль математики в создании общей теории относительности. Известно, что А. Эйнштейн, создавая общую теорию относительности, находился под влиянием реляционной метафизики Э. Маха, однако получившаяся в итоге теория положила начало развитию иной метафизической парадигмы – геометрической, сыгравшей важную роль в формировании современных представлений о Вселенной. Эта статья подготовлена автором в связи с исполняющимся в этом году 100-летним юбилеем создания общей теории относительности (точнее, с момента написания в работах А. Эйнштейна и Д. Гильберта уравнений Эйнштейна).

В традиционном разделе «Из наследия прошлого», кроме уже упомянутой выдержки П. Вопенки из его книги «Альтернативная теория множеств», помещена статья П.А.М. Дирака «Отношение между математикой и физикой», написанная в 1938 г. Идеи, изложенные в этой статье, в значительной мере определяли характер физических исследований автора. В частности, во время пребывания в нашей стране в 1956 г. Дирак оставил на стене кафедры теоретической физики МГУ имени М.В. Ломоносова следующую надпись: «Физический закон должен иметь математическое изящество».

В заключение выражаем благодарность академику А.Т. Фоменко за предоставленные им файлы его графических произведений, использованные для иллюстрации статей данного выпуска журнала.

МЕТАФИЗИКА БЕСКОНЕЧНОСТИ

ГРАНИ БЕСКОНЕЧНОГО

С.А. Векшенов

Российская академия образования

В статье представлены основные идеи, связанные с развитием фундаментального для математики понятия бесконечного. Прослеживается связь этого понятия с широким кругом проблем богословия, философии и естествознания.

Ключевые слова: бесконечность, диалектика абсолютного и трансфинитного, количественная и порядковая бесконечность, несимметричность «мира количества» и «мира порядка».

Das Unendliche hat wie keine andere Frage von jeher so tief das Gemüt des Menschen bewegt; das Unendliche hat wie kaum eine andere Idee auf den Verstand so aufregend und fruchtbar gewirkt; das Unendliche ist aber auch wie kein anderer Begriff so der Aufklärung bedürftigl.

David Hilbert

Ни одна проблема не волновала так глубоко человеческую душу, как проблема бесконечного, ни одна идея не оказала столь сильного и плодотворного влиянии на разум как проблема бесконечного, но, с другой стороны, ни одно понятие не нуждалось так в выяснении, как понятие бесконечного.

Д. Гильберт

Введение

Математическая деятельность состоит преимущественно в решении задач, что, собственно, и делает математику ни с чем не сравнимым инструментом познания. Однако сами задачи и их метафизический контекст имеет не меньшую, а в иных случаях и большую значимость, чем само решение (*In re mathematica ars propendi quaestionem pluris facienda est quam solvendi)*. Следуя этой мысли Г. Кантора, обратимся к задачам, выстроенным вокруг осевого понятия математики – понятия бесконечности. Движение вдоль этой оси отмечено фундаментальными идеями: то резко взмывающими вверх, то плавно текущими в течение десятков и сотен лет. Обрисовать все изгибы этого течения в кратком очерке едва ли возможно, поэтому приходится «прыгать через ступеньки» и останавливаться лишь на самых значимых, с точки зрения автора, моментах. Получившийся в результате этих «прыжков» образ представлен ниже.

Классика бесконечного

Зенон Элейский (ок. 490 до Р.Х. – ок. 430 до Р.Х.)

Непрерывность – дверь в бесконечное. Однажды открыв ее, мы уже навсегда становимся заложниками двух миров: реального и трансцендентного. Само же понятие непрерывного возникло из необходимости отобразить в мышлении феномен движения. Возникшие при этом проблемы оставили след на всем дальнейшем развитии науки. Обычно их связывают с именем Зенона Элейского. В четырех дошедших до нас «апориях» он доказывает, что движение в непрерывной среде, континууме, не может быть мыслимо без внутреннего противоречия.

С точки зрения бесконечности (понимаемой исключительно в негативном смысле – как нечто противоположное конечному) этот факт может быть интерпретирован как невозможность непротиворечивым образом мыслить континуум как *завершенную* бесконечность.

Рассмотрим более подробно наиболее известную апорию «Ахиллес».

Пусть Ахиллеса отделяет от финиша расстояние в *1*, а черепаху в ½.

Предположим, что Ахиллес бежит быстрее черепахи в два раза. Ахиллес и черепаха начинают двигаться одновременно. Зенон утверждает, что Ахиллес никогда не догонит черепаху. Действительно, в то время как Ахиллес пробегает половину пути, то есть приходит в точку начала движения черепахи, она успеет проползти отрезок в *¼.* Когда же Ахиллес преодолеет расстояние в *¼*, черепаха пройдет расстояние в *1/8,* и опять окажется впереди Ахиллеса и т.д. Таким образом, всякий раз, когда Ахиллес преодолевает расстояние, отделяющее его от черепахи, она успевает уползти от него на некоторое расстояние.

Данная апория опирается на понятие *непрерывного* в смысле возможности бесконечного деления (что, строго говоря, является только необходимым условием непрерывности), а также возможности выделить в нем отдельные «элементы», соотнесенные с моментами времени. Не вдаваясь в детальную реконструкцию рассуждений Зенона, попытаемся, тем не менее, выявить формальную сторону этой апории.

Рассмотрим конечный отрезок *[A,B]*. Представим его в виде счетной суммы отрезков (иначе можно сказать, что мы осуществили вложение *бесконечности* ω в отрезок *[A,B] конечной* длины l: $\omega \subseteq l$):

$$[A,B]=\sum_{k=1}^{\omega}[a_k, a_{k+1}], \text{ где } a_1=A \text{ и } a_\omega=B.$$

Очевидно, что $l[a_k, a_{k+1}] \to 0$, при $k \to \omega$.

Если считать a_k – шагами Ахиллеса, а a_{k+1} – шагами черепахи, то, очевидно, что в точке B черепаха догонит Ахиллеса. С другой стороны, точки этой последовательности *занумерованы* натуральными числами (точнее, порядковыми натуральными числами), которые вовсе не оканчиваются на ω, поскольку всегда можно сделать еще один шаг и образовать числа: ω+1, ω+2 (рис. 1).

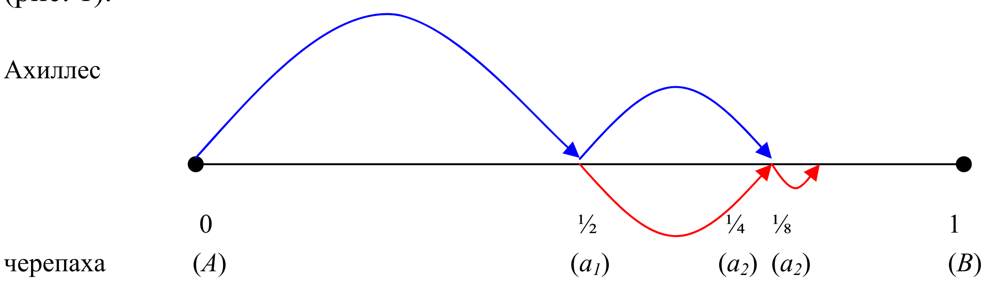


Рис. 1

Таким образом, последовательность $\{a_k\}$, с одной стороны, сходится к B, с другой, – с точки зрения номеров, – неограниченна.

Эта двойственность в понимании сходимости последовательности $\{a_k\}$ отразилась в двойственной оценке этой апории. Значительная часть авторов считали, что проблема исчерпывается введением актуальной бесконечности, которую Зенон (как, впрочем, и вся античная наука) предпочитал избегать. Однако после всестороннего исследования теоретико-множественной бесконечности такое решение стало рассматриваться как не вполне убедительное.

Примером этому является следующее замечание Д. Гильберта и П. Бернайса, высказанное ими в знаменитой монографии «Основания математики». «Обычно этот парадокс пытаются обойти рассуждениями о том, что сумма бесконечного числа этих временных интервалов все-таки сходится и дает конечный промежуток времени. Однако это рассуждение абсолютно не затрагивает один существенный парадоксальный момент, а именно парадокс, заключающийся в том, что некая последовательность следующих друг за другом событий, последовательность, завершаемость которой мы не можем себе даже и представить (не только фактически, но хотя бы даже и в принципе), на самом деле все-таки должна завершиться.

В действительности, конечно, существует более радикальное решение этого парадокса. Ведь на самом деле мы вовсе не обязаны считать, что математические пространственно-временные представления движении являются также физически осмысленными также в случае произвольно малых пространственных и временных интервалов. Более того, у нас имеются все основания предполагать, что, стремясь иметь дело с достаточно простыми понятиями, эта математическая модель экстраполирует факты, взятые из определенной области опыта, а именно из области в пределах того порядка величин, которые еще доступны нашему наблюдению, подобно тому, как совершает определенную экстраполяцию механика сплошной среды, которая кладет в основу своих рассмотрений представление о непрерывном заполнении пространства материей. Подобно тому, как при неограниченном пространственном дроблении вода перестает быть водой, при неограниченном дроблении движения также возникает нечто такое, что едва ли может быть охарактеризовано как движение. Если мы встанем на эту точку зрения, то этот парадокс исчезает» [1].

Подобное, «качественное» разрешение парадокса отражает крайне интересный поворот мысли, который с удивительной настойчивостью повторяется у различных авторов. В данном случае он особенно важен, поскольку в нем содержится вполне определенный намек на квантовую механику. Из этого следует, что апории Зенона содержат в себе не только идею актуальной бесконечности, развернутую впоследствии Г. Кантором в теорию множеств, но и квантовую теорию. Воистину эти апории можно считать началом «Большого интеллектуального взрыва», который привел к современному естествознанию.

Апории Зенона показывают, что понятие бесконечности возникает в самых принципиальных и ответственных моментах наших интеллектуальных построений, направленных на осмысление внешнего мира. Более того, последовательное построение непротиворечивой картины этого мира невозможно без привлечения понятия бесконечного. И от того, какой смысл мы предадим этой бесконечности, во многом, если не в главном, зависит суть этой картины и вытекающие из нее следствия.

Убедительность аргументов Зенона была столь велика, что у последующих философов и математиков возник своеобразный *horror infiniti* (страх бесконечного). Преодоление этого «страха» растянулось на несколько веков и не завершено по сей день. Например, традиционно считается, что появление бесконечностей – это своеобразный сигнал о дефектах в теоретических построениях.

Аристотель (384–322 до Р.Х.)

Согласно Аристотелю о бытии можно говорить в двух смыслах: в возможном и в действительном. В соответствии с этим имеются два понятия бесконечности: бесконечность потенциальная и бесконечность актуальная. Аристотель подробно разбирает принципиальный для всего последующего понимания бесконечного вопрос о том, каким образом существует бесконечное: как сущность или как свойство, присущее некой природе. Вопрос о том, «может ли находиться бесконечное в предметах математических и в мыслимых и не имеющих величины», в «Физике» не разбирается, так как этот вопрос «относится скорее к общему исследованию проблемы» [2]. В «Физике» Аристотель рассматривает проблему бесконечного чувственного воспринимаемого тела и доказывает, что оно не может существовать.

Основной тезис Аристотеля: бесконечное существует потенциально, но не существует актуально; бесконечное не есть что-то действительное, а только возможное. При этом опять же акцент делается на логическое, в данном случае уже модальное определение бесконечного. О потенциально бесконечном он говорит: «...бесконечное может существовать так, как существует день или как состязание – в том смысле, что оно становится всегда иным». И дальше: «Вообще говоря, бесконечное существует таким образом, что всегда берется иное и иное, а взятое всегда бывает конечным, но всегда разным и разным. Так что бесконечное не следует брать как определенный предмет, например, как человека или дом, а в том смысле как говорится о дне или состязании, бытие, которые не есть какая-либо сущность, а всегда находится в возникновении и уничтожении, и хотя оно конечно, но всегда разное и разное... Бесконечное существует в возможности, так как вне его всегда можно что-нибудь взять <...> Выходит, что бесконечное противоположно тому, что о нем обычно говорят: не то, вне чего ничего нет, а то, вне чего всегда есть что-нибудь, то и есть бесконечное».

Что касается непрерывного, то Аристотель понимал его, как «то, что делится на части, всегда в свою очередь делимые». Это означает, что в непрерывном нет неделимых частей. Следовательно, его нельзя сложить из этих, неделимых частей. С этой точки зрения, окружность, например, нельзя мыслить состоящую из точек, поскольку точка есть «то, что не имеет частей». Существенным является то, что вместе с понятием непрерывного Аристотель рассматривает понятие *неделимого* и утверждает, что только с помощью неделимого непрерывное обретает форму и может быть познано как нечто определенное. Аристотель исходил из предположения, что пространство и время непрерывно именно в этом смысле. Это позволило ему сформулировать аргументы против апории Зенона и в конечном итоге *непротиворечиво мыслить реальное движение.* Отметим, что в этом контексте *понятие бесконечности имеет вполне определенное естественнонаучное содержание и ограничивается рамками потенциальной бесконечности.*

Деление бесконечности на потенциальную и актуальную оказалось самой существенной идеей, определившей лицо этой проблемы. Последующие двадцать с лишним веков интеллектуальной работы в этом направлении в значительной мере прошли в круге этой идеи.

Бесконечность в контексте теологии: диалектика абсолютного и трансфинитного

Христианская мысль возродила идею актуальной бесконечности. При этом движение к ней осуществлялось с двух сторон: со стороны неоплатоников, совершавших восхождение от Міра к Единому, и со стороны христианских богословов, для которых не-конечность являлась имманентным качеством Бога («Ты есть Бог неведомый, невидимый, неизъяснимый, непостижимый»). Соприкосновение этих идей в конечном итоге породило идею «трансфинитного» – актуальной бесконечности, которая, тем не менее, не растворяется в Абсолютном. При этом само трансфинитное могло обладать разнообразными качествами. Это открывало возможности для детального исследования феномена актуальной бесконечности.

Прокл (412–485 Р.Х.)

По концепции неоплатоников: Плотина, Порфирия, Прокла и др. (III–V вв. Р.Х.) – существенны четыре основные стадии бытия:

Единое
Ум
Душа
Космос

Эти ступени связаны иерархией подчинения. Общая схема этого подчинения выглядит примерно так.

Зададим вопрос, откуда происходит движение в ***Міре*** физических тел. Очевидно, от воздействия других тел, а те, в свою очередь, от воздействия третьих и т.д.

Перебрав все тела, можно задать тот же вопрос о всех телах в целом, то есть о *Космосе.* Ясно, что причиной движения Космоса является он сам, то есть Космос обладает свойством самодвижения. Это свойство и есть *Душа* – более высокая ступень, чем Космос.

Далее, можно применить тот же ход рассуждения к Душе. Тела движутся Душой, но по каким законам движется Душа? Каков смысл этого движения? Неоплатоники отвечают – *Ум*. Ум – это принцип универсального осмысления, устройства и закономерностей. Снова можно сформулировать вопрос о происхождении Ума. Поскольку Ум предполагает раздельное мышление, его высшим принципом будет *Единое*.

В эту общую для неоплатоников конструкцию Прокл ввел дополнительную область *Чисел*. Каждое такое число, с одной стороны, не отражает никакого конкретного качества и, следовательно, подобно Единому. С другой стороны, всякое число есть некоторое различие, то есть нечто аналогичное неоплатоническому Уму.

При таком подходе одной из центральных проблем философии неоплатоников становится взаимоотношение «единого» и «многого».

Воспроизведём фрагменты разработки этой проблемы из трактата Прокла «Первоосновы теологии» (*Στοιχείωσις θεολογική*) [3].

1. Всякое множество тем или иным образом причастно Единому.
2. Всё причастное Единому едино и не едино.
3. Всякое становится Единым в силу причастности Единому.
4. Всё объединённое отлично от того, что Едино в себе.
5. Всякое множество вторично по сравнению с Единым.

6. Всякое множество состоит или из объединённостей или из единичностей.

7. Всё потенциально сущее происходит от актуально сущего.

8. Всякое множество беспредельных потенций зависит от одной первичной беспредельности, которые существуют не как потенция, допускающая причастность себе и не обладающая потенцией, а сама по себе, будучи не потенцией чего-то причастного, а причиной всего сущего.

Даже приведенный беглый абрис основных идей неоплатонизма в трактовке Прокла не оставляет сомнения в исключительной близости к ним исходных идей теории множеств.

Например, построение ординальной шкалы в теории множеств Г. Кантора имеет несомненную идейную основу с приведенной выше схемой подъема от Космоса к Единому.

Числа же, промежуточные между Единым и Умом, могут быть интерпретированы как неограниченная шкала мощностей. Приведенный же фрагмент трактата Прокла, вообще, производит впечатление пособия по теории множеств, включая парадокс Рассела.

Св. Максим Исповедник (580–668 Р.Х.)

Согласно учению св. Максима Исповедника, сотворение *Міра* есть динамический процесс, который происходит в согласии с Божественной волей. Этот процесс состоит из трёх стадий: во-первых «пуска в ход», <u>генезиса</u> – начала осуществления видимого мира; затем развёртывания – свободной реализации всех божественных идей, <u>кинесиса</u> и, наконец, стабильного состояния, <u>статиса</u>, «успокоение» в Боге.

«Начало всего естественного движения состоит в “пуске в ход” сотворения существ и начало этого “пуска в ход” положено Богом-Творцом (генесиургос). Целью естественного движения сотворённых существ является неподвижное состояние. Это состояние происходит от Бесконечного и достигается путём выхода из всего конечного; вследствие отсутствия пространства в нём по естественным причинам прекращается движение существ… Бог есть начало (архи) и конец (телос) всякого возникновения и движения: они исходят из Него, стремиться к Нему и в Нём обретают свою неподвижность» [4].

В этой концепции уже нет места неоплатонической идее вечного предсуществования *Міра*, согласно которой не только идеальные образы *Міра*, но и сам *Мір* предвечно существуют в божественном сознании, в Едином. Для св. Максима такое представление об устройстве *Міра* невозможно: Бог сотворил как видимый, так и невидимый *Мір* из ничего. В отличие от неоплатоников у Максима идея *Міра* от века коренится в бытии Бога, но не является его сущностью.

Напротив, введение времени, как это сделано у св. Максима, означает, что всё существующее в этом (историческом) *Міре* важно в глазах Бога и поэтому касается также и нас.

Основные рассуждения Исповедника вокруг диалектики: «времени» и «вечности», «движения» и его «завершения». Эта диалектика воплощается у него в понятии «эона» (αιων). «Эон – это время, когда оно прекращает свое движение, и время – это эон, когда он увлекается движением. Движение происходит во времени – от эона к эону».

Эта диалектика существенно отличается от диалектики «части» и «целого», развиваемой неоплатонизмом и воспринятой ведущими богословами Запада: бл. Августином, Н. Кузанским и др. Именно диалектика «части» и «целого» была полностью воспринята Г. Кантором и синтезирована им в понятии множества.

Р. Гроссетест (ок. 1175 – 1253 Р.Х.)

В осмыслении бесконечного особый интерес представляют взгляды христианского теолога Роберта Гроссетеста епископа Линкольнского и учителя Роджера Бэкона.

По Гроссетесту, актуально-бесконечное есть определенное число (*certus numerus*), которое, хотя и непознаваемо для нас, тем не менее, существует актуально. Причем актуально-бесконечные числа можно сравнивать между собой, так, что одно из них может быть больше или меньше другого. Человек в силу несовершенства своего интеллекта не в состоянии постигнуть бесконечное *in actu*, но для Бога дано сразу, в одном акте, то, что человек осуществляет шагами. Потенциально бесконечному у Гроссетеста противостоит не единое, как у греков, но актуально сущее бесконечное множество единиц. Человеческому познанию доступно только потенциально бесконечное – низший тип бесконечного. Истинно бесконечным, с точки зрения Гроссетеста, является актуально бесконечное, постигаемое Богом.

Здесь мы видим пример того, что взгляд на схоластику как на бесплодное умствование совершенно не соответствует ее роли в становлении многих математических идей, теории бесконечного, в частности. В своем историческом обзоре математики XIX в. Феликс Клейн пишет: «Глубоко несправедливым является общепринятый взгляд на схоластику как на теряющеюся в бесплодных мудрствованиях направлении ума. Именно наша эпоха должна была бы отказаться от такого поверхностного суждения, основанием к которому послужил чуждый нам мистический и метафизический фон, присущий всем творениям эпохи схоластов. Однако если снять со схоластических спекуляций это покрывало, из-за которого они кажутся поверхностному взору чисто теологическими мудрствованиями, то оказывается, что они в сущности являются безупречными подходами к проблемам, составляющим в настоящее время содержание того, что мы называем теорией множеств. Недаром Георг Кантор, творец теории множеств, учился у схоластов» [5].

Бесконечность в естественнонаучных моделях

«Апории» Зенона традиционно принято считать отправной точкой современного естествознания и математики, что, по-видимому, соответствует действительности. Именно при разрешении этих апорий Аристотелем было введено фундаментальное понятие непрерывности. Это, свою очередь, повлекло за собой введение не менее фундаментального понятия – бесконечности. Аристотель не разрешил проблемы до конца, предпочитая оставаться в рамках потенциальной бесконечности. Однако без разрешения апорий Зенона феномен движения не получал необходимой абстрактной модели и, следовательно, дальнейшее развитие физики было невозможно. С другой стороны, трудности, возникающие при решении этих апорий, значительно превосходили возможности даже самых выдающихся последователей Аристотеля. Основные проблемы группировались вокруг понятия бесконечного. Требовалось принять не только актуальную бесконечность, что само по себе вылилось в исключительно сложную проблему. Но и этого оказалось недостаточным. Надо было принять существование качественно различных бесконечностей. В этом случае можно было бы завершить временной и пространственной ряды, возникающие в апории Зенона и тем самым строго определить среду непрерывности, континуум. Именно по отношению к этой среде можно корректно говорить и о самом понятии движения.

Исключительная сложность этой задачи находилась в явном противоречии с очевидностью самого феномена движения. После безуспешных попыток соединить его свойства со свойствами континуума, которые растянулись на весь период Античности и Средневековья, пришло новое понимание проблемы.

Со времен Галилея отправной точкой развития физической теории становится движение как таковое. Свойства среды, континуума, отошли на второй план, и основная задача в понимании движения свелась к выяснению его характера или, говоря языком математики, – определению его уравнения. В свою очередь, характер движения, его уравнение, зависит от вполне определенных причин. В физике Галилея эти причины должны были иметь материальную природу, что символизировало принципиальный разрыв с физикой Аристотеля, в которой причина движения лежала, как известно, в метафизической плоскости. Эта традиция в известной мере была нарушена в общей теории относительности А. Эйнштейна. В ней характер движения частицы в гравитационном поле определялся метрикой пространства-времени, то есть свойствами среды непрерывности (точнее, само поле было объявлено метрикой пространственно-временного континуума).

Г. Галилей (1564–1642)

Во многом благодаря Галилею бесконечность сошла с теологической орбиты и стала восприниматься как интеллектуальный феномен, обладающий теми или иными качествами. На одно из таких качеств, а именно то, что для бесконечного нарушается древний философский принцип «целое больше части», указал сам Галилей в «Беседах и математических доказательствах двух новых наук» (в духе тогдашнего времени изложение ведется в виде беседы):

«*Сальвиати.* ‹…› Мне пришёл в голову пример, который я для большей ясности изложу в форме вопросов, обращённых к синьору Симпличио, указавшему на затруднения. Я полагаю, что вы прекрасно знаете, какие числа являются квадратами и какие нет.

Симпличио. Я прекрасно знаю, что квадратами являются такие числа, которые получаются от умножения какого-либо числа на самого себя; таким образом, числа четыре, девять и т. д. суть квадраты, так как они получаются от умножения двух и соответственно трёх на самих себя.

Сальвиати. Великолепно. Вы знаете, конечно, и то, что как произведения чисел называются квадратами, так и образующие их, то есть перемножаемые, числа носят название сторон или корней; другие числа, не являющиеся произведениями двух равных множителей, не суть квадраты. Теперь, если я скажу, что количество всех чисел вместе – квадратов и не квадратов – больше, нежели одних только квадратов, то такое утверждение будет правильным; не так ли?

Симпличио. Ничего не могу возразить против этого.

Сальвиати. Если я теперь спрошу вас, каково число квадратов, то можно, по справедливости, ответить, что их столько же числом, сколько существует корней, так как каждый квадрат имеет свой корень и каждый корень – свой квадрат; ни один квадрат не может иметь более одного корня и ни один корень – более одного квадрата.

Симпличио. Совершенно верно.

Сальвиати. Но если я спрошу, далее, каково число корней, то вы не станете отрицать, что оно равно количеству всех чисел вообще, потому что нет ни одного числа, которое не могло бы быть корнем какого-либо квадрата; установив это, приходится сказать, что число квадратов равняется общему количеству всех чисел, так как именно таково количество корней, каковыми являются все числа. А между тем ранее мы сказали, что общее количество всех чисел превышает число квадратов, так как большая часть их не является квадратами» [6].

И. Ньютон (1642–1727) – Г.В. Лейбниц (1646–1617)

Концентрация внимания на исследовании феномена движения потребовала создания нового математического аппарата, который окончательно оформляется благодаря И. Ньютону и Г.В. Лейбницу.

Традиционно считается, что эти два величайших гения разными путями пришли к одним и тем же конструкциям анализа (что, в частности, зафиксировано в общеизвестной формуле Ньютона–Лейбница). Однако при ближайшем рассмотрении можно увидеть две существенно разные концепции, подведенные под общий знаменатель, преимущественно в педагогических целях.

Подход Ньютона в целом выдержан в «процессуальной логике». Он вводит два процесса (две переменные величины): *флюэнту* (от *лат.* fluo –

теку), соотнесенную с абсолютным временем и *флюксию* – скорость изменения флюэнты.

В «Методе флюксий...» (1670–1671) Ньютон формулирует две основные взаимно обратные задачи анализа:

а) определение *соотношения* между флюксиями по данному *соотношению* между флюентами (дифференцирование неявно заданной функции);

б) определение *соотношения* между флюентами по данному *соотношению* между флюксиями (интегрирование дифференциального уравнения).

По всей видимости, Ньютон сознательно избегал детального обсуждения проблемы прямого вычисления флюксии по данной флюэнте – это немедленно привело бы к обсуждению проблем в духе апорий Зенона (хотя он с неизбежностью и вводил понятие «момента» движения). Задача нахождения названных выше соотношений определенным образом «снимала» эту проблему и давала необходимый инструмент расчетов.

Ньютон нашел решение обеих поставленных проблем, предложив при этом весьма тонкие аналитические методы, смысл которых, во многом оставался скрытым для последующих поколений (об этом много говорил И.В. Арнольд).

Примечательным является то, что идея Ньютона об «элиминации» среды непрерывности путем анализа отношений (соотношений) между физически ясными сущностями на новом уровне была реализована в Бинарной системе комплексных отношений Ю.С. Владимирова.

Подход Г.В. Лейбница к исследованию движения был существенно иным.

С одной стороны, он ясно понимал всеобщность причинно-следственных связей и ввел фундаментальное понятие функции как математическое выражение этой связи. С другой стороны, его подход к анализу реализовывал общую концепцию *Mathesis Universalis* (универсальной характеристики), что подразумевало выстраивание четкой системы правил и удобной символики. В такой алгебраизованной системе, строго говоря, нет места переменным величинам. Однако именно переменные величины и являются в анализе основным предметом исследования. По-видимому, единственным выходом из положения является введение наряду с точками континуума новых сущностей – бесконечно малых и бесконечно больших чисел, которые, с одной стороны, являются переменными, с другой – обыкновенными числами, на которые распространяются все алгебраические операции. В этом решении можно усмотреть применение стандартной методологии «превращения проблемы в постулат» (Э. Кассирер приписывает авторство этой методологии И.В. Гёте). С другой стороны, сформулированный Лейбницем же принцип достаточного основания заставляет отвечать на вопрос, «почему дело обстоит ровно так, а не иначе». Вероятно, ответом Лейбница стала «Монадология», к которой бесконечно малые и бесконечно большие числа получили статус философских «монад».

В 60-х гг. XX в. А. Робинсон нашел математическое «оправдание» решения И.Г. Лейбница, которое также представляет методологический интерес (оно будет рассмотрено ниже).

Теория множеств как универсум бесконечного

Теория множеств, безусловно, является интеллектуальной собственностью всей математики. В то же время это во многом творение немецкой мысли и немецкого языка. Без учета этого обстоятельства многие существенные и далеко идущие повороты этой концепции оказываются неоправданно спрямленными.

Начнем с того, что «*Mengenlehre*» Г. Кантора это вовсе не «теория множеств», а скорее «учение о множествах» (здесь можно вспомнить *Wissenshaftslehre* И.Г. Фихте, которое тоже не является «теорией науки»). По мысли ее создателя *Mengenlehre* – это, прежде всего, метафизическая область, которая, разумеется, не лишена математической конкретики. Именно метафизическая проекция позволяет понять логику возникновения самого понятия множества, в то время как «теория множеств» просто его постулирует. Как мы убедимся в дальнейшем, владение этой логикой является существенным приобретением в плане осмысления теоретико-множественных проблем.

Попытаемся в общих чертах обрисовать эту логику.

Идея отделения движения от среды, в которой этой движение осуществляется, оказалось исключительно плодотворной. Она позволила развить мощный аналитический аппарат исследования разнообразных процессов, не задумываясь об умозрительной проблеме их осуществления в следе непрерывности. Однако предоставленные самим себе процессы также генерируют парадоксы (связанные, например, с расходящимися рядами), и снова главным «виновником» оказывалась бесконечность.

Все это показывало, что процессы необходимо определенным образом ограничивать. Теория точечных множеств как раз и выросла из таких ограничений. Действительно со времен Зенона движение в континууме мыслилось как движение от точки к точке. Следовательно, и сам континуум как среда, в которой осуществляется процесс, можно мыслить собранием, совокупностью (*Sammlung*) точек. С другой стороны, объять неограниченный процесс можно только с помощью замкнутого в себе бесконечного набора точек. Следующий шаг от «точки» из совокупности к «элементу» множества (*Menge*) уже вполне естественен.

Можно проследить и другой ход мыслей, который приводит к понятию *Menge* (сам этот термин возник в процессе долгих поисков Кантора нужного ему слова).

Зададимся проблемой: каким образом можно «расширить» натуральный ряд *1, 2, 3…n* в область бесконечного? Яркую картину этого расширения нарисовал Д. Гильберт в очерке *«Über das Unendliche*». Попробуем представить ее в несколько иной логике.

Если ω – это «число», большее чем любое натуральное число, то $\omega+1$ должно быть равно ω, поскольку ω «не конечно» и никаких иных чисел у нас нет. Для продолжения процесса необходимо осмыслить, что может представлять собой «число» $\omega+1$. Как известно, каждое натуральное число может рассматриваться как количественное и порядковое. Выйти за пределы натурального ряда можно либо в количественном, либо в порядковом смысле, то есть ω является либо числом бесконечным в смысле количества, но конечным в смысле порядка, либо бесконечным в смысле порядка, что влечет его бесконечность в смысле количества. Если считать, что ω это «количественная бесконечность», то $\omega+1 \neq \omega$ и можно двигаться дальше. Получив ряд: $\omega+1, \omega+2, \omega+3\ldots,$ можно, казалось бы, образовать число 2ω в том же, количественном, смысле. Однако, в отличие от натурального ряда, члены этого ряда различимы только в порядковом смысле, в количественном же смысле все они совпадают с ω.

Для решения проблемы необходимо изобрести способ различать члены ряда: $\omega+1, \omega+2, \omega+3\ldots,$ который в идейном смысле можно было бы отнести к количественному. Суть решения состояла в том, чтобы представить «количество» как набора объективно различаемых и субъективно различимых элементов *(wohlunterschiedenen Elementen).* Это прямо ведет к понятию множества: *«Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten in unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die Elemente von M genannt werden) zu einem ganzen».* Числа $\omega+1, \omega+2, \omega+3\ldots$, совпадающие в количественном смысле, различаются как множества.

Теория множеств, в ее традиционном понимании, возникла как синтез обоих из названных подходов. «Кантор желает – как он сам мне говорил на съезде естествоиспытателей в Касселе, – писал Ф. Клейн, – достигнуть “истинного слияния арифметики и геометрии” в учении о множествах, другими словами, он желает представить учение о целых числах, с одной стороны, и теорию различных образов, с другой стороны, а также многое другое как равноправные и объединенные главы общего учения о множествах или совокупностях» [5].

Б. Больцано (1781–1848) – Г. Кантор (1845–1918) – Р. Дедекинд (1831–1916)

Мысль о том, что теория множеств является теорией количественной бесконечности и «множество» является носителем этой бесконечности явно присутствует в трудах ее создателей.

«Под актуально бесконечным (a'φωρδμεναε) следует понимать такое количество, которое, с одной стороны, не изменчиво, но определено и неизменно во всех своих частях и представляет собой истинную постоянную величину, а с другой, в то же время превосходит по своей величине всякую конечную величину того же вида» (Б. Больцано) [7].

«...Для нас является важным только то, сможем ли мы при посредстве определения одного только количества определить бесконечность вообще. Это было бы не так, если бы оказалось, что понятие бесконечного в настоящем значении этого слова может быть применено только к количествам, то есть бесконечность есть свойство одних только количеств, иначе говоря, что мы называем нечто бесконечным, поскольку мы в нем находим свойство, которое можно рассматривать как бесконечное количество. А это, по моему мнению, действительно справедливо. Математик, очевидно, никогда не употребляет этого слова в другом смысле, так как он вообще занимается почти исключительно определением величин, принимая одну из них того же рода за единицу и пользуясь понятием о числе» (Г. Кантор) [8].

Что касается Р. Дедекинада, то в книге «*Was sind und was sollen die Zahlen*» он говорит следующее: «Множество S полностью определено только тогда, когда относительно всякой вещи известно, является ли она элементом множества S или нет». В этом случае понятие множества сводится к понятию разрешимого множества, что радикальным образом сужает его онтологические возможности.

«Бегство» от актуальной бесконечности

Mengenlehre, которую оставил после себя Кантор, была «наивной» в том смысле, что ее основные постулаты не были явно сформулированы, что приводило к массе недоразумений и даже явных противоречий, наиболее известным из которых стал парадокс Рассела, хотя подобные парадоксы были известны и Кантору, и Гильберту.

Разумеется, ничего специфически «множественного» эти парадоксы не содержали – в той или иной форме они были хорошо известны еще со времени неоплатоников. Большее беспокойство вызывало иное. Учению Кантора не хватало *Ordnung'*а, который бы расставил все по своим местам. Деятельность по его созданию, начатая Э. Цермело, явила очень многое, что заставило усомниться в достижении желаемого результата.

Предвидя такой поворот, а также имея существенно иные методологические установки, Л.Э.Я. Брауэр предпринял масштабную попытку повернуть течение мысли в ином, не теоретико-множественном направлении. Независимо от успеха (или неуспеха) созданной им концепции «интуиционизма», желание избежать обращения к актуальной бесконечности и остаться только в рамках бесконечности потенциальной, было сочувственно воспринято очень многими математиками: от Г. Вейля до А.А. Маркова и А.С. Есенина–Вольпина. У каждого из них были свои аргументы занять именно эту позицию.

В целом идеи интуиционизма оказались очень привлекательными, что бросало тень на концепцию актуальной бесконечности. Именно тогда сформировалось и в определенной мере закрепилось представление о том, что актуальная бесконечность, хотя и является исключительно эффективным инструментом математики, проблемна в плане внутренней логики.

Как представляется автору данной работы, проблема актуальной бесконечности заключается в ее уникальности. Канторовская бесконечность – это бесконечность количественная (внутри которой существует градация бесконечных количеств). Если предположить, что существуют иные типы актуальной бесконечности, то многие из имеющихся проблем распределяются между различными типами бесконечности и противоречия исчезают.

Б. Рассел (1872–1970) – Э. Цермело (1871–1953) – Д. Гильберт (1862–1943)

Парадокс Рассела можно отнести к еще одному проявлению «закона Арнольда»: имя утверждения не совпадает с именем его первооткрывателя. Так или иначе, именно этот «парадокс» ускорил деятельность по наведению порядка в учении о множествах, которая осуществлялась в русле аксиоматических идей Д. Гильберта. Одним из результатов этой деятельности стала аксиоматическая теория Цермело – Френкеля (***ZF***), которая стала рассматриваться как чрезвычайный и полномочный представитель канторовского учения. Как и положено, через некоторое время этот представитель сам занял место оригинала. Сейчас, говоря о «теории множеств», подразумевают, как правило, именно ***ZF*** (хотя это далеко не единственная аксиоматика).

Исходная аксиоматика Э. Цермело появилась в 1908 г. в журнале **«*Mathematishe Annalen*»** и состояла из семи аксиом:

1) *Axiom der Bestimmtheit* (аксиомы объемности);
2) *Axiom der Elementarmengen* (аксиомы элементарных множеств);
3) *Axiom der Aussonderung* (аксиомы выделения);
4) *Axiom der Potenzmenge* (аксиомы множества подмножеств);
5) *Axiom der Vereinigung* (аксиомы объединения);
6) *Axiom der Auswahl* (аксиомы выбора);
7) *Axiom der Unendlichkeit* (аксиомы бесконечности).

Структура аксиоматики была традиционной: вводилось определение равенства множеств (аксиома 1), определялся набор простейших множеств (аксиома 2) и определялись допустимые правила генерации новых множеств (3-7). Наибольший интерес (а также проблему) представляет аксиома выбора. Строго говоря, именно эта аксиома «проталкивает» в теорию множеств идею времени и «подвертывает» ее под идею пространства.

Л.Э.Я. Брауэр (1881-1966)

Лёйтзен Эгберт Ян Брауэр был выдающимся «игроком» на теоретико-множественном поле (прежде всего, как один из создателей топологии). При этом он одним из первых ясно осознавал всю проблемность «канторовского рая», которую невозможно исправить никакими законодательными актами.

Альтернативой множеству в концепции Брауэра выступала свободно становящаяся последовательность или последовательность выбора (*Wahlfolge*). В противовес *Menge Wahlfolge* мыслилась процессом, причем процессом принципиально не трансформируемым в множество (как, например, последовательность натуральных чисел), поскольку каждый член этой последовательности возникал в результате свободного выбора. Концепция Брауэра не получила всестороннего развития, как концепция Г. Кантора, однако в ее контексте появилось много блестящих идей, круги от которых расходились в течение десятилетий (одна из таких идей была высказана А.Н. Колмогоровым в [9]).

Брауэр ясно осознавал необходимость учета длительностного, процессуального компонента математики, однако потенциальная бесконечность была не в состоянии конкурировать с актуальной бесконечностью и его глубокая концепция постепенно свернулась в «конструктивную математику».

Бесконечность как символ всеединства: новая феноменология

Теория множеств Кантора «раздробила» математический мир на отдельные элементы, а программа Гильберта и построенные в ее рамках аксиоматики юридически закрепили эту раздробленность. Следующим, естественным шагом явилась «сборка» из этих элементов всех фундаментальных «узлов» математики и естествознания. Технология такой «сборки» на основе определенных структур была зафиксирована в «Программе Бурбаки».

Деятельность по созданию этих структур растянулась приблизительно на пятьдесят лет и привела к созданию теоретико-множественной модели математики. В этой модели математика предстает гигантским автономным универсумом взаимосвязанных теоретико-множественных структур, которые проецируются на самые различные области естествознания. Такая модель, обладая несомненными техническими достоинствами, дает не столько единство математического универсума, сколько его унификацию, что, разумеется, не одно и то же. Более того, эта модель существенно искажает содержание понятий, благополучно существовавших в «до-множественной» математике. К таким понятиям, в частности, относится и понятие бесконечного (развернутое обоснование этого тезиса принадлежит, в частности, П. Вопенке).

Между тем единство математического универсума – это сверхидея теории множеств (хотя, как всегда, все началось с конкретной задачи из теории тригонометрических рядов) и континуум гипотеза – ключевой момент этой сверхидеи. Бесконечные кардинальные числа $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$ ... $\aleph_\lambda$, за исключением начального сегмента, не имеют под собой ясного математического содержания и являются плодом чистой абстракции. Если с помощью этих кардинальных чисел нельзя «поймать» непрерывное, то они превращаются в некоторое подобие сюрреалистического ландшафта с фигурами (выражение современного математика А. Матиаса).

Точкой «бифуркации» в понимании сути теории множеств является понятие «символа», в частности «символа бесконечного». Стоит ли за символом некая абстрактная реальность или возникший символ – это только «идентификатор», возникший в ходе деятельности в некотором «игровом пространстве»? Или более тонкий вопрос: могут ли существующие в теоретико-множественном смысле объекты не иметь обозначения?

Как известно, исторически развитие теории множеств от данной точки пошло по линии «идентификатора», что в конечном итоге вылилось в программу Гильберта и «лингвистическую философию» Л. Витгенштейна. В математическом плане это привело к созданию «теории моделей» (А. Тарский, А. Мальцев, А. Робинсон и др.), в которой отношение «символ» – «реальность» (или в более точной форме: «синтаксис» – «семантика») становится предметом строгой математической теории.

В настоящее время эта линия развития достигла своих естественных границ, обнажив свойственные ей фундаментальные проблемы. Обсуждение этих проблем естественно начать с точки, от которой начала свой отсчет данная линия развития, и более внимательно приглядеться к её альтернативе.

П. Флоренский (1882–1937)

Как известно, П.А. Флоренский выражал иное понимание «символов бесконечного» и символов вообще. «*Бытие*, *которое больше самого себя*, – таково основное определение *символа. Символ – это нечто, являющее собою то*, *что не есть он сам*, *бóльшее его*, *и однако существенно чрез него объявляющееся.* Раскрываем это формальное определение: *символ есть такая сущность*, *энергия которой*, *сращенная или*, *точнее*, *срастворенная с энергией некоторой другой*, *более ценной в данном отношении сущности*, *несет таким образом в себе эту последнюю.* Но, неся сущность в занимающем нас отношении более ценную, символ, хотя и имеет свое собственное наименование, однако, с правом может именоваться также наименованием *той*, высшей ценности, а в занимающем отношении и *должен* именоваться этим последним» [10].

Проводя параллель между качеством бесконечного, отмеченного Г. Галилеем: «часть равна целому» (которое получило грандиозную разработку в теории множеств) и качеством символа, данного Флоренским: «Часть, равная целому, причём целое не равно части», можно сказать, что символ, по Флоренскому, безусловно, указывает на бесконечность, и эта бесконечность иного рода, чем теоретико-множественная бесконечность.

Новые лики бесконечного

Канторовская теория множеств заняла доминирующее положение в математике XX века, превратившись со временем в догму, что противоречило основной идее самого Кантора *«Das wesen der Mathematik liegt in ihrer Freiheit*». Следуя этой безусловной идее, мы сосредоточим внимание на проблемах, которые принесла с собой великая концепция Кантора.

Как нам представляется, корень фундаментальных проблем теоретико-множественной математики (и, следовательно, всего точного естествознания) лежит в плоскости диалектики «пространства» («множества») и «времени» («длительности»), сконцентрированной в понятии континуума. Фактически мы в очередной раз вступаем в круг проблем, обрисованных еще Зеноном.

Созданная Кантором точечная модель континуума при внимательном и беспристрастном анализе оказалась весьма проблемной как в идейном, так и техническом плане, хотя ее влияние на математику XX в. трудно переоценить. Тем не менее на сегодняшний день существуют, по крайней мере, три грозовые тучи на горизонте теории множеств, способные поразить точечную модель и пролиться дождем новой концепции континуума.

К этим «тучам» можно отнести:

– континуум-проблему;

– нестандартный анализ;

– квантовую теорию.

Все эти теории по-разному высвечивают один и тот же эффект: ограниченность канторовского «пространственного подхода» и необходимость учета «длительности».

Для обретения конкретики погрузимся в эти «тучи».

К. Гёдель (1906–1978) – П. Коэн (1934–2004) – Д. Скотт (р. 1932) – Р. Соловей (р. 1938)

Континуум-проблема воплотила в себе сверхзадачу теории множеств – «очислить» непрерывное. В случае ее положительного решения Г. Кантор оказался бы в роли царя Соломона, который «все расположил мерою, числом и весом» (Прем. Сол. XI, 21).

Кантор не сумел найти решение сформулированной им проблемы, но ее принципиальный характер был вполне осознан его современниками, в частности Д. Гильбертом.

Последующие поколения математиков уже более смутно представляли себе метафизические корни континуум-проблемы. Для них это была, прежде всего, исключительно трудная задача, сочетавшая простоту формулировки с крайне изощренной техникой. Попытаемся понять, что стоит за этой техникой.

Основные этапы восхождения к решению этой проблемы состояли в следующем.

1. С точки зрения теории множеств, все континуумы равномощны. Это позволяет свести общую континуум-проблему к выяснению мощности конкретного континуума, например множества действительных чисел (подчеркнем, что в *данный момент* мы находимся внутри теоретико-множественного универсума, в котором не существует иных объектов, кроме множеств). Вместе с тем это множество, очевидно, равномощно множеству $P(N)$ всех подмножеств натурального ряда N.

После всех этих уточнений, континуум-проблема приобрела характер математической задачи. При этом следует отметить один, далеко не формальный момент. В исследованиях по теории множеств основной упор был сделан не столько на континуум-проблему, сколько на *континуум-гипотезу* – предположение Кантора о том, что мощность континуума c равна первому несчетному кардинальному числу: $c = \aleph_1$. Это позволило подойти к проблеме в духе идей «логического позитивизма», при котором выяснение сущности объекта заменяется изучением логической структуры утверждений о его теоретико-множественной модели. Применительно к данной проблеме речь идет об установлении зависимости континуум-гипотезы и аксиом теории множеств – конкретно аксиом **ZF**. Возможны следующие варианты решения:

- континуум-гипотеза не совместима с аксиомами **ZF**;
- континуум-гипотеза выводится из аксиом **ZF**;
- континуум-гипотеза не зависима от аксиом **ZF**.

Из этих вариантов очевидно только первые два являются собственно решениями. Третий вариант показывает лишь то, что данное утверждение является «слишком сильным» для выбранной системы аксиом и «запаса мощностей», допустимых в **ZF**, не хватает для описания мощности континуума.

При осуществлении третьего варианта возможен следующий выход. Нужно волевым усилием пополнять **ZF** новыми аксиомами, например, аксиомами о существовании так называемых «больших кардиналов» и попытаться доказать или опровергнуть континуум-гипотезу в расширенной теории. Эта деятельность в принципе может продолжаться неограниченно долго. Однако при этом может возникнуть вопрос о корректности самого метода сведения «сущности» к «высказываниям», и в принципе должен возникнуть вопрос о новой методологии.

2. Все эти варианты были осознаны еще в 30-х гг. XX в. Уже тогда можно было предвидеть, что осуществится именно третий вариант. Однако вера в эффективность формализма не угасала вплоть до 1960-х гг., а континуум продолжал оставаться для него самой притягательной проблемой. Необходимо было, чтобы сам формализм «расписался» в несостоятельности решить проблему континуума. Для этого нужны были конкретные результаты. Одни были получены К. Геделем в 1938 г. и П. Дж. Коэном в 1963 г.

Суть их состояла в следующем.

Главную трудность в определении мощности континуума вносят так называемые непредикативные определения, при которых, элемент множества определяется через само множество, то есть часть определяется через целое. Например, если мы перечислим *все* элементы множества S, диагональный метод позволяет указать в S еще один элемент. Иными словами, в теоретико-множественных конструкциях (точнее, в аксиоме множества подмножеств) заложен механизм *самопорождения* элементов.

Возможны следующие подходы к «нейтрализации» этого механизма.

Во-первых, можно просто «запретить» непредикативные определения путем жесткой регламентации процесса образования множеств. Множества, полученные путем таких регламентированных правил, называются *конструктивными* множествами. Возникает вопрос: могут ли в универсуме конструктивных множеств L выполняться все аксиомы **ZF,** то есть является ли он *моделью* **ZF**? В 1938 г. К. Гедель показал, что это действительно так, при этом мощность континуума *P* (*N*) в этой модели равна $\aleph_1$.

3. Второй путь является принципиально иным. Формализация наивной теории множеств помимо очевидных технических моментов несет в себе и общую идею: теория множеств – это, прежде всего, совокупность *утверждений* о множествах. В этой трактовке множество – это то, что делает утверждение истинным или ложным. Можно сказать, что утверждение – это функция из универсума множеств в двухэлементное множество {«истина», «ложь»} = {1,0}. Механизм самопорождения «размывает» множество. Обрисованная связь множеств и утверждений о множествах подсказывает мысль, что этот механизм можно имитировать размыванием, релятивизацией, «истины». Точнее, будем рассматривать утверждение как функцию из универсума множеств, но не в множество {0,1}, а в некоторое другое множество *B*, такое, что $\{0,1\}\subseteq B$. Для того чтобы такое отображение сохраняло все основные свойства, присущие отображению в множество {1,0}, необходимо, чтобы *B* являлось булевой алгеброй. Таким образом, каждому утверждению сопоставляется элемент булевой алгебры (иногда говорят, что данное утверждение *оценено* элементом *B*).

В условиях действия механизма самопорождения, утверждение, истинное на некотором шаге, за счет появления нового элемента может перестать быть таковым. Добавление нового элемента к уже имеющимся элементам и множествам образует некий «возможный мир», в котором утверждение оценивается элементом *B.* Таким образом, механизм самопорождения моделируется некоторой совокупностью неограниченных цепочек элементов *B*. Нас интересуют цепочки, которые в каком-то смысле «стремятся» к «истине», то есть к «*1*» – максимальному элементу булевой алгебры *B.* Множество *G,* которое содержит в себе все такие цепочки (и удовлетворяет некоторым дополнительным условиям) называется *ультрафильтром*. Именно принадлежность ультрафильтру обеспечивает, с одной стороны, «размывание» («расширение») множества *P (N*), с другой – обеспечивает выполнение всех аксиом ZF (П. Коэн, 1963, Д. Скотт – Р. Соловей, 1967). Переход от «“*1”* – истины» к «*G* – истине» означает переход от «универсальной истины» к «истине в возможных мирах».

Этот переход можно также трактовать как переход от «истинности» к «истинности почти всюду». Например, множества *A* и *B* будут равны, если они совпадают почти всюду. Как известно, такой тип отношений характерен для теории вероятностей.

Вообще говоря, ослабление аксиом (понятий) с целью включения в орбиту исследования новых объектов является стандартным приемом аксиоматики бурбакистского толка. Своеобразие метода форсинга состоит в том, что такому «ослаблению» подвергается само понятие «истины».

Насколько приведенные конструкции приближают нас к ответу на вопрос о мощности континуума?

Послушаем самого Коэна.

«...Нет разумного основания ожидать, что какое-либо описание большого кардинала, которое пытается построить этот кардинал с помощью идей, происходящих от аксиомы подставки, окажется когда-либо достаточным для получения c . Таким образом, c больше, чем $\aleph_n$, $\aleph_\omega$ ... $\aleph_\alpha$, где $\alpha = \aleph_\omega$ и т.д. С этой точки зрения c рассматривается как невероятно большое множество, которое дано нам какой-либо смелой аксиомой и к которому нельзя приблизиться путем какого бы то ни было постепенного процесса построения. Быть может, последующее поколение научится видеть эту проблему яснее и выражаться о ней более красноречиво» [11, с. 282].

А.И. Мальцев (1909–1967) – А. Робинсон (1918–1974)

Теория континуума, построенная Лейбницем, двойственна. В ней на равных правах участвовали «точки» и «не-точки» – бесконечно малые величины. Долгое время считалось, что эта модель континуума является нестрогой и порождает множество проблем, хотя именно такая модель в значительной мере отражала физическую реальность. В конечном итоге она была заменена точечной, теоретико-множественной моделью, которая в настоящее время является общепринятой.

Следует сказать, что с развитием в XX в. математической логики произошла неожиданная реинкарнация идей Лейбница.

В 1936 г. А.И. Мальцевым была доказана «теорема компактности», утверждающая, что множество формул первого порядка имеет модель тогда и только тогда, когда модель имеет каждое его конечное подмножество. Из этой теоремы, в частности, следовало существование бесконечно больших натуральных чисел.

В 1961 г. А. Робинсон, развивая идеи А.И. Мальцева, с помощью теории ультрафильтров обосновал существование неких объектов, свойства которых давали основания отождествить их с монадами Лейбница. В дальнейшем эта теория стала известна под названием «нестандартного» или не архимедова анализа (анализа, в котором не выполняется аксиома Архимеда). Принципиальным моментом конструкции Робинсона был так называемый «принцип переноса», позволяющий перенести свойства «стандартных» объектов на «нестандартные» объекты – монады.

При этом необходимо отметить, что нестандартный анализ – это теоретико-множественная теория, которой свойственны все онтологические проблемы теории множеств.

Д.Х. Конвей (р. 1937)

Сюрреальные числа (surreal numbers – название принадлежит Д. Кнуду) возникли в работах Дж. Конвея (John Horton Conway) для описания ряда аспектов теории игр. С традиционной, теоретико-множественной точки зрения, сюрреальные числа – это еще одна, правда очень интересная, модель нестандартных вещественных чисел, в которую кроме обычных вещественных чисел входят инфинитные и инфинитоземальные величины. До настоящего времени (с 1974 г.) сюрреальные числа практически не нашли себе адекватного применения и, по большей части, рассматриваются как изящная математическая экзотика (и как персонаж художественного эссе Д. Кнута).

Стрелочная запись сюрреальных чисел (найденная, по-видимому, А.А. Кирилловым [12]), когда число представляется конечной или неограниченной последовательностью знаков «↑» и «↓», высветила существенную особенность этой модели – чисто порядковое представление действительного числа в виде комбинации противоположных по направлению шагов.

Операции сложения чисел – последовательностей в этой модели, согласно Конвею, должны удовлетворять принципу *очередности и простоты.* Суть этого принципа состоит в том, что правила действия определяются не сразу для всех последовательностей, а постепенно: сначала для более «ранних», а потом для более «поздних»; при этом в качестве результата выбирается самая ранняя последовательность. В этом нельзя не усмотреть аналога с принципом Гюйгенса.

П. Вопенка (1935–2015)

Замечательный чешский математик П. Вопенка, получивший одновременно с П. Коэном доказательство независимости континуум-гипотезы от остальных аксиом ZF, тем не менее, редко упоминался как один из авторов этого выдающегося результата.

Созданная им позднее «Альтернативная теория множеств» часто трактовалась как некоторый вариант нестандартного анализа А. Робинсона, хотя, несомненно, это одна из самых глубоких и детально разработанных альтернатив канторовскому *Mengenlehre.* Более того, с позиций этой теории П. Вопенка дал оригинальную трактовку теории множеств Б. Больцано, которая, по-видимому, ближе к исходным идеям её автора и явно не идет в русле традиций её толкования как первоначальной схемы теории множеств Кантора.

Ключевым понятием Альтернативной теории множеств является понятие «полумножества» («semiset»). Автор глубоко осмысливает важнейшее понятие канторовского определения множества: *wohlunterschiedenen Elementen,* то есть понятие различных элементов, которые субъект имеет возможность различить. С его точки зрения, феномен бесконечности возникает при наблюдении больших, необозримых множеств, часть элементов которых могут быть субъективно неразличимыми [13].

Концепция автора

Теория множеств, скрепленная структурами Бурбаки, на весьма продолжительное время создала ощущение внутреннего порядка математики. Предполагалось, что всякая возникшая мысль найдет в ее конструкциях свое адекватное воплощение. Одновременно сформировался теоретико-множественный язык, который превратил теорию множеств в своего рода «операционную систему», где каждый «пользователь» мог найти удобную для себя конструкцию и инструменты.

Вместе с тем в границах этой грандиозной системы стала формироваться не укладывающаяся в нее эмпирика (те самые «грозовые облака», о которых упоминалось выше). Примечательные феномены можно увидеть как внутри теории множеств, так и во внешних по отношению к ней областях.

Рассмотрим некоторые из таких феноменов.

Как нам видится, фундаментальным фактом современной теории множеств является решенная (или не решенная?) и уже не раз упомянутая континуум-проблема.

Вглядимся в нее более внимательно.

В работе *«Beiträge zur Begründung der transfiniten»* Кантор формулирует классическое определение множества и вводит его фундаментальную характеристику «*Mäglichkeit*» или «*Cardinalzahl»*. Соответствующее определение выглядит так: «*Mäglichkeit oder Cardinalzahl von M nennen wir den Allgemeinbegriff, weleher mit Hülfe unseres action Dennkvermögens dadurch aus der Menge M hervorgeht, dass von der Bashaffenheit ihrer vershhiedenen Elementem und von der Ordnung ihres Gegebenseins abstrahirt wird»*.

С точки зрения этого естественного определения, каждое множество обязано иметь вполне определенную мощность, независимо от того, какими постулатами регламентируется образование данного множества. В этой ситуации естественно задать вопрос: каков *Cardinalzahl* континуума как некоторого множества? Именно этот вопрос и задал Кантор и одновременно предположил, что *Cardinalzal* континуума равно $\aleph_1$.

С другой стороны, само *Cardinalzahl* может быть определено как класс равномощных множеств (то общее, что содержится во всех равномощных множествах). Мощность (*Cardinalzahl*) данного множества определяется через принадлежность множества данному классу.

Разумеется, речь идет не о тонкостях формулировок, а о разных методологиях выхода в абстрактную сферу. В первом случае предлагается сфокусировать зрение только на тех свойствах *данного* объекта, которые в данный момент являются важными (типично модельный подход). Во втором случае абстракция является как знаменатель всех мыслимых возможностей (подобную методологию с блеском применял Р. Фейнман в «интегралах по траекториям»).

Различие двух подходов очевидно.

В первом случае речь идет о сущностной, индивидуальной, количественной характеристике множества, обобщающей количественную характеристику числа (можно даже сказать, что множество выступает носителем этой характеристики, что и соответствует оригинальной концепции Кантора).

Второе определение говорит о способе «измерения» данной характеристики, то есть присваивания ей некоторого числа, в общем случае – трансфинитного. Результат такого «измерения», естественно, зависит от наличия или отсутствия отображений между множествами.

Рассмотренные выше результаты К. Гёделя и П. Коэна относятся именно к таким «измерительным» процедурам, которые часто выдаются за сущностные свойства самого континуума. Однако именно названные результаты говорят о том, что континууму можно без противоречия приписать любую мощность: $\aleph_0$, $\aleph_1$ ... $\aleph_\alpha$ …, то есть в сущностном плане континуум является *переменной величиной.* Это значит, что в, казалось бы, полностью статичном мире множеств существуют не умозрительные, а реальные абстрактные процессы.

Как и в случае теории множеств, возникают богословские параллели, но теперь уже с трудами Св. Максима Исповедника и его концепцией «неподвижного времени».

Подобное наращивание абстракции можно расценить как чистое умозрение, если бы не одно существенное обстоятельство.

Как известно, в ходе создания физики микромира было введено понятие волновой функции Ψ, которая, подобно платоновской идее, определяла динамику физических объектов. Однако, в отличие от статического *εἶδος*’а, волновая функция выражает абстрактную динамику. Этот принципиальной важности факт, по идущей от Бурбаки традиции, прячется за структурные моменты, в данном случае гильбертово пространство. Для вычислительной деятельности этого оказывается вполне достаточно, однако сам феномен абстрактной динамики (как и в случае континуума) не получил должного осмысления.

В квантовой теории появляются внутренние степени свободы, которые также являются сигналом о наличии абстрактной динамики.

Реакцию на эти феномены можно выстроить в духе естественнонаучных традиций: (А) сформулировать гипотезу, объясняющую данные феномены, (В) предложить некую альтернативу и (С) проанализировать следствия.

А. Осмысление феномена внутренней динамики теории множеств ведет к осмыслению основ самой теории множеств. Как нам представляется, дело обстоит следующим образом.

Как известно, натуральное число n является единством количества и порядка $n = (n_R, n_Z)$. Современная математика явно или неявно отдает предпочтение количественному аспекту, считая, что $n = n_R$. Пройдя все ступени логики, это равенство оборачивается теорией множеств, причем само понятие «множество» возникает как «носитель» количественной бесконечности (в несколько усеченном виде эта логика была приведена выше). Количественный аспект числа традиционно ассоциируется с пространством, в то время как порядковый аспект считается проявлением времени. В этом плане теорию «множеств» можно рассматривать как «пространственную» теорию, в которой время «подверстывается» под пространство, но отнюдь им не подавляется (это хорошо понимал еще Л. Брауэр).

В. Альтернативой равенству $n = n_R$ является арифметический постулат двойственности, утверждающий, что число есть единство двух различных *не* *сводимых* друг к другу сущностей: количества и порядка (времени и пространства), что в сути отражает status quo дотеоретико-множественного понимания числа.

Для закрепления этой идеи формулируется общий *принцип* двойственности, который заключается в том, что каждый «количественный» объект A имеет свой «порядковый» образ $A^{\sim}$ (но не обратно). Иными словами, каждый пространственный объект имеет свой временной образ.

Принцип двойственности очень естествен и практически очевиден. Вопрос заключается в том, является ли оно математически содержательным, то есть можем ли мы извлечь из него некоторые нетривиальные математические утверждения?

Ответ на этот вопрос оказался утвердительным, что было продемонстрировано в серии работ [14; 15] и др.

C. Несколькими штрихами обозначим открывающиеся возможности.

Наиболее радикальным следствием принципа двойственности является появление нового типа бесконечности, порядковой бесконечности Ω-числа, большего любого натурального числа в смысле порядка. Разумеется, выход к такой бесконечности не может быть осуществлен с помощью теоретико-множественных операций. Для этого используются иные подходы, в частности, идеи неразличимости Ω в смысле порядка, то есть $\Omega +1= \Omega$, где предикат равенства понимается уже в чисто порядковом смысле.

Ω – исключительно «сильная» бесконечность: для любого кардинала $\aleph_\lambda$ $\mathbf{\Omega} > \aleph_\lambda$. В свободном толковании это означает, что *порядковых чисел больше, чем количественных*. Принимая во внимание уже упомянутые философские традиции связывать количество с пространством, а бесконечность со временем, можно заключить, что *бесконечность пространства меньше, чем бесконечность времени*.

Само же множество выступает носителем количественной бесконечности. Что касается носителя порядковой бесконечности, то его носителем выступает абстрактный динамический объект – фундаментальное вращение.

Введение в оборот двух типов актуальных бесконечностей и, соответственно, двух типов носителей вносит определенное понимание причин появления абстрактной динамики, что позволяет, в частности, по-новому оценить ряд результатов о независимости теоретико-множественных утверждений. Дальнейшее развитие этого подхода дает, по выражению В.И. Арнольда, «освежающе непохожий» мир порядковых образов. Более того, «мир количества» и «мир порядка» оказываются несимметричными (!), что дает повод развивать крайне привлекательные и, надеемся, полезные методы и конструкции.

В заключение хотелось бы сказать несколько слов об одном неожиданном эффекте, возникшем в процессе работы над статьей. Идеи, высказанные разными людьми, в разное время, и собранные на немногих станицах удивительным образом начинают «интерферировать», проникать друг в друга, образуя новое, неизвестное автору качество. Возможно, ради такой интерференции и стоит предпринять подобную работу.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гильберт Д., Бернайс П.* Основания математики. – Т. 1. – М.: Наука, 1979.
2. *Аристотель*. Сочинения. – Т. 3. – М., 1981.
3. Прокл. Первоосновы теологии. – Тбилиси: Мецниереба, 1972.
4. св. М. Исповедник. Ampigua / пер. фрагм. пр. И. Мейендорфа. Цит. по книге Мейендорф И. Введение в святоотеческое богословие. – Вильнюс, 1992.
5. *Клейн Ф.* Лекции о развитии математики в XIX столетии. – Ч. 1. – М., 1937.
6. *Галилео Галилей.* Математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки, относящихся к механике и местному движению. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1934.
7. *Больцано Б.* Парадоксы бесконечного. – Одесса, 1911.
8. *Kantor G.* Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre. – Leipzig, 1983.
9. *Kolmogoroff A.* Zur Deutung der intuitionistishen Logik – Mathematische Zeitschrift. – 1932. – Bd. 35. – S. 58–65.
10. *Флоренский П.А.* У Водораздела мысли // Сочинения. – Т. 2. – М., 1990.
11. *Коэн П.Дж.* Теория множеств и континуум-гипотеза. – М.: Мир, 1969.
12. *Кириллов А.А.* Что такое число? – М.: Физматлит, 1993.
13. *Вопенка П.* Математика в альтернативной теории множеств. – М.: Мир, 1983.
14. *Векшенов С.А.* Метафизика и математика двойственности // Метафизика: век XXI. – М.: БИНОМ, 2011. – С. 91–114.
15. *Векшенов С.А., Бешенков А.С.* Порядковые образы комплексных чисел и кватернионов в основаниях физики // Метафизика. – 2013. – № 9. – С. 70–85.

FACETS OF THE INFINITE

S.A. Vekshenov

The article represents main ideas related to the development of the concept of infinity, which is fundamental for mathematics. The connection of this concept with a wide range of problems of theology, philosophy and natural science is traced.

Key words: infinity, dialectics absolute and transfinite, quantitative and serial infinity, asymmetry of “world of quantity” and “world of an order”.

О РАЗВИТИИ ПОНЯТИЯ БЕСКОНЕЧНОСТИ В МАТЕМАТИКЕ

С.Я. Серовайский

В статье дается краткая характеристика математических взглядов на понятие бесконечности. Что же это, нечто абсолютное, всеобъемлющее и непознаваемое, к которому принципиально невозможно подступиться или просто что-то вполне конкретное и осязаемое, но уж очень большое? А, может быть, это ничем не ограниченный процесс или реальность, обладающая вполне конкретными свойствами, в корне отличными от того, с чем мы имеем дело в обыденной жизни, но вполне поддающимися анализу? Бесконечность пронизывает практически все разделы математики, а сама математика в отсутствии бесконечности просто немыслима.

Ключевые слова: математика, бесконечность, предел, геометрия, множество.

> Решение проблем, издавна окутывавших тайной математическую бесконечность, является, вероятно, величайшим достижением, которым должен гордиться наш век.
>
> *Бертран Рассел*

1. Три лика античной бесконечности

Человечество с глубокой древности сталкивалось с необходимостью пересчета различных предметов. При этом для практических целей обычно не требовалось оперировать с большими совокупностями объектов: «один», «два», «три»… Но рано или поздно появляется предел счета, и вместо характеристики предметов конкретным числом говорится просто: «много». Одна песчинка – это песчинка. Две, три, четыре песчинки – это всего лишь несколько песчинок. Но наступает момент, когда совокупность некоторого количества песчинок как-то незаметно перерастает в «кучу»[1]. И добавление

[1] ***Парадокс «куча».*** На этот парадокс можно выйти с помощью математической индукции. Действительно, одна песчинка кучи определенно не образует. Предположим, что у нас есть n песчинок, которые не образуют кучу. Добавление одной песчинки ситуацию не меняет, а значит, $n + 1$ песчинка также не образует кучу. Отсюда можно сделать вывод о том, что никакое количество песчинок кучу не образует. Заключение, конечно же, неверное… Данный парадокс получил естественное объяснение с позиций *теории нечетких множеств*, разработанной во второй половине XX в. ***Лотфи Заде***. Дело в том, что понятие «кучи» не является четким. Утверждение о том, что на данном шаге описанного процесса набор песчинок кучу не образует, остается вообще-то верным, но степень его достоверности уменьшается от шага к шагу. Рано или поздно вероятность того, что рассматриваемая совокупность песчинок не может быть интерпретирована как куча, станет меньше 50 %. И тогда более досто-

новых песчинок уже ничего всерьез не меняет. «Много» – это что-то большое, существенно превосходящее обычные количества. И вот здесь уже начинают понемногу проглядываться туманные лики Бесконечного. Но, по сути своей, мы в действительности имеем дело лишь с *практической бесконечностью* – чем-то вообще-то конечным, но уж очень большим. Столь большим, что его количественная характеристика с практической точки зрения смысла не имеет.

Однако со временем неминуемо появляются коварные вопросы. Сколько существует деревьев в лесу? А песчинок на берегу моря? А камней в горах? А звезд на небе? И постепенно приходит странная мысль о существовании абсолютного Нечто, принципиально превосходящего всё сущее. Вспоминается, к примеру, древняя притча об алмазной горе, находящейся где-то на краю земли. Раз в тысячелетие туда прилетает орел точить свой клюв. Когда он сточит всю гору до основания, пройдет лишь один миг по сравнению с Вечностью. Представление о чем-то абсолютном, универсальном, безграничном, неиссякаемом пронизывает философские и религиозные учения. Названия используются разные: Бог, Материя, Брахман, Космос, Дао, Логос, Абсолют…

Возможно, первым мыслителем, имевшим позитивный взгляд на бесконечное, был **Анаксимандр**, живший в шестом веке до нашей эры. В частности, Анаксимандр ввел понятие *апейрона* – неопределенного и беспредельного первовещества, являющегося основой мироздания... Однако всё это было уж очень туманно, слишком далеко от того мира идей, которыми оперируют математики.

Но человеческая мысль не знает границ. Она неминуемо приводит к более конкретным рассуждениям о бесконечном, заставившим уже математиков серьезно задуматься. Пятый век до нашей эры… ***Зенон***, представитель философской школы элиатов. Он не был математиком, но в его странных философских воззрениях можно усмотреть признаки последовательности и предела, ряда и непрерывности, итерационного процесса и интеграла. И, конечно же, бесконечности.

Хорошо известен рассказ Зенона о непутевом Ахиллесе, безуспешно пытающемся догнать черепаху. Действительно, Ахиллеса и черепаху изначально разделяет некоторое расстояние. На его преодоление Ахиллес затрачивает какое-то время. Однако за это время черепаха куда-то уползет. А когда Ахиллес преодолеет расстояние, отделяющее его теперь от черепахи, последняя вновь продвинется вперед. Но поскольку процесс этот ничем не ограничен, то, по словам Зенона, быстроногий герой так никогда и не догонит медлительную черепаху.

А вот и другой известный парадокс Зенона – «дихотомия». Чтобы преодолеть некий путь, надо сначала пройти его половину. Однако до этого

верным окажется противоположное заключение о том, что мы уже имеем дело с кучей. При этом степень достоверности последнего заключения в дальнейшем от шага к шагу будет постоянно возрастать.

нужно пройти половину от этой половины, то есть четверть всего пути. Но еще раньше следует пройти половину от последней половины… А поскольку и этот процесс не ограничен, мы попросту не сдвинемся с места[2]

Рассуждения Зенона далеко не столь наивны, как может показаться на первый взгляд. В них чувствуется глубокая логика. Не зря его учителем был знаменитый философ **Парменид**, которого считают одним из основоположников логики. Парадоксальные выводы Зенона напрямую связаны с бесконечностью. Не с туманным неосязаемым Абсолютом и не с практической бесконечностью, а с чем-то качественно иным.

Парадоксы (или, как их обычно называют, *апории*) Зенона показывают, что с бесконечностью следует обращаться с максимальной осторожностью. Но как же обойти возникающие трудности? Выдающийся философ-материалист **Демокрит** нашел радикальный выход из создавшегося положения. Он говорил о том, что существует предел дробления объектов – *атом*. Всё в этом мире состоит из них, а меньше атома ничего вообще быть не может. По Демокриту, существуют *амеры*, неизмеримые неделимые элементарные отрезки. А в итоге парадокс Зенона получает естественное объяснение. Его хитроумные рассуждения остаются в силе лишь до того момента, когда расстояние между Ахиллесом и черепахой станет минимально возможным. А поскольку меньшего расстояния не бывает, то вот тут-то Ахиллес черепаху и обгонит. Аналогичным образом преодолевается и апория «дихотомия».

Атомы и амеры Демокрита являются, по сути, формами практической бесконечности – величинами конечными, но уж очень сильно отличающимися размерами от естественных величин, с которыми мы сталкиваемся в обыденной жизни. Когда мы говорим, к примеру, о неисчислимости песчинок на берегу океана, мы понимаем, что их число в действительности конечно, но значительно превосходит все количества, с которыми мы обычно сталкиваемся на практике. Следует отметить, что Демокрит был еще и первоклассным математиком. Отталкиваясь от своей концепции атома, он первым определяет объем пирамиды путем разбиения ее на сколь угодно малые (атомарные) части.

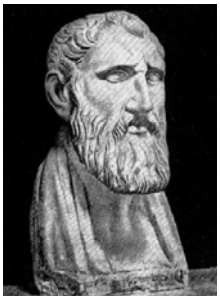
Так значит, весь мир, и математика в том числе, может оперировать исключительно с конечными объектами? И вот здесь на сцену выходит **Евдокс**, ученик **Платона**, бывшего идейным противником Демокрита. Посту-

[2] ***Апория «дихотомии»***. Чрезвычайно интересную интерпретацию апории «дихотомии» дал один из наиболее глубоких мыслителей XX в. ***Герман Вейль***, фразу которого о бесконечности мы взяли в качестве эпиграфа к данной статье. Представим себе, что у нас есть гипотетическая вычислительная машина, которая половину минуты вычисляет первое натуральное число, то есть 1. Следующее число 2 она вычисляет вдвое быстрее, то есть за четверть минуты, число 3 еще вдвое быстрее, то есть за одну восьмую минуты и т.д. В результате получится, что за минуту (бесконечную сумму всех рассматриваемых интервалов времени) машина пересчитает все натуральные числа. И мы получим их все как некую данность, как нечто единое и реально существующее. Но это уже сильно напоминает бесконечность актуальную. Так, за бесконечностью потенциальной неминуемо скрывается актуальная.

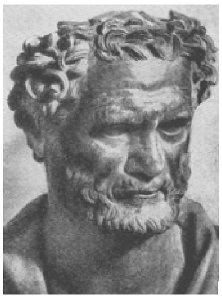
лирование Демокритом искусственных границ Евдоксу представляется ничем не обоснованным. Напротив он выдвигает интереснейшую аксиому, названную впоследствии *аксиомой Архимеда*. Суть этого утверждения состоит в том, что для любой величины всегда найдется величина, ее превосходящая. Тем самым нет предела возрастания величин. А еще любую величину можно неограниченно дробить, то есть не существует и предела уменьшения величин. Собственно, для философов в этом не было ничего оригинального. Еще за сто лет до Евдокса **Анаксагор** писал: «*И в малом ведь нет наименьшего, но везде есть меньшее, но и в отношении к большому всегда есть большее*». Но то – философы. А Евдоксу удалось придать этим мыслям математический смысл.

Тонкие логические рассуждения Зенона получают у Евдокса строгую математическую основу. Фактически его конструкции ведут к понятию *предела*, служащего математической характеристикой бесконечного процесса и являющегося основой математического анализа. Евдоксу следует **Евклид** в своих «*Началах»*. В частности, *второй постулат Евклида* говорит о том, что любой отрезок можно неограниченно продолжать.

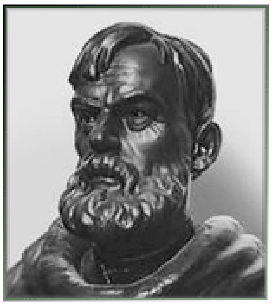
Евдокс был учеником Платона. А другим его учеником был **Аристотель**, не только хорошо знакомый с Евдоксом, но и поддерживавший с ним дружеские отношения. Именно в осознании природы бесконечного близость этих двух блестящих мыслителей сказалась в максимальной степени. Аристотелю принадлежит явное определение двух типов бесконечности. Прежде всего, это – *потенциальная бесконечность*, ничем не ограниченный процесс, в основе которого лежит скорее отрицание конечности, чем признание бесконечности в качестве существующей реальности. Именно потенциальной бесконечностью веет от философских рассуждений Зенона и математических конструкций Евдокса. Такую форму бесконечности Аристотель безоговорочно поддерживает в противовес практической бесконечности Демокрита, то есть атомам.



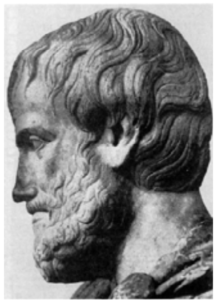
Зенон
(ок. 490 – ок. 430 до н.э.)



Демокрит
(ок. 460 – ок. 370 до н.э.)



Евдокс
(ок. 408 – ок. 355 до н.э.)



Аристотель
(384–322 до н.э.)

Однако мыслима и качественно иная бесконечность – некий реально существующий объект, поддающийся характеристике, но не сопоставимый ни с какой конечной величиной. Таким образом, Аристотель вводит понятие *актуальной бесконечности*. Однако само существование актуальной бесконечности он (как, впрочем, и Евдокс) отрицает. И понадобилось более двух тысяч лет, чтобы понять, что именно осознание концепции актуальной бесконечности непосредственно выводит к самым основаниям математики.

2. Познание потенциальной бесконечности

В то время как актуальная бесконечность была надолго скрыта в плотном тумане, познание потенциальной бесконечности практически не прекращалось. Интуитивное представление о бесконечности натуральных чисел издавно присутствовало в работах древнегреческих математиков. Одним из первых позитивных результатов, касающихся непосредственно бесконечности, было доказательство **Евклидом** бесконечности простых чисел. При этом он использовал принцип исключения третьего, то есть доказательство от противного, что восходит к Пармениду, учителю Зенона, хотя в определенной степени эта техника была известна и ближайшим последователям **Пифагора**.

Предположим, что существует лишь конечное множество простых чисел $p_1, p_2, ..., p_n$.

Определим число $p = p_1 p_2 ... p_n + 1$. При его делении на любое из чисел p_i в остатке получится число 1. Следовательно, число p должно быть простым, коль скоро оно не имеет простых делителей. В то же время оно определенно превосходит все рассматриваемые простые числа, а значит, не входит в имеющийся список. Таким образом, предположив, что всё множество простых чисел исчерпывается некоторым конечным набором, мы неминуемо придем к противоречию. Так, бесконечность у Евклида оказывается характеристикой конкретного объекта – множества простых чисел…

В неявной форме потенциальная бесконечность присутствует в методе исчерпывания, разработанном Евдоксом. В частности, сводя площадь круга к площадям вписанных в него многоугольников, Евдокс фактически рассматривает неограниченно возрастающую сумму площадей треугольников, образующих вписанный многоугольник, что соответствует понятию ряда. А вот в явной форме бесконечная сумма (ряд) присутствует в работе **Архимеда** «Квадратура параболы», где исследуется площадь фигуры, ограниченной параболой и прямой, параллельной оси абсцисс. Фактически он вычисляет значение

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^k} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + ... = \frac{4}{3}.$$

Труды Архимеда более полутора тысяч лет оставались непреодолимой вершиной представления математиков о бесконечности. И лишь с началом эпохи Возрождения исследователи понемногу стали возвращаться к анализу бесконечных рядов. Так, в первой половине XIV в. англичанин **Ричард Суайнсхед** находит сумму ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + ... = 2.$$

Чрезвычайно умело работает с рядами выдающийся французский мыслитель XIV в. **Николя Орем**, бывший, кстати, епископом. Он не только вычисляет сумму некоторых рядов, но и доказывает расходимость гармонического ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....$$

Результат весьма знаменательный и показывающий, что, хотя общий член ряда $1/k$ стремится к нулю с ростом номера k, значение самой суммы неограниченно возрастает.

Что было дальше? Можно еще понять длительный провал европейской математики в первом тысячелетии нашей эры. Это было время упадка греческой, а затем и римской цивилизации с последующими нашествиями варваров… Но как объяснить, что лишь через два с лишним века появились результаты, перекрывающие работы Орема? В частности, на середину XVII в. приходятся исследования **Герарда Меркатора**, **Джеймса Грегори** и других математиков, в которых рассматриваются уже не только числовые, но и функциональные ряды. Однако для постижения потенциальной бесконечности наиболее важен другой результат того времени.

Блез Паскаль был удивительно разносторонним человеком. Будучи сыном известного математика **Этьена Паскаля**, автора любопытной кривой, называемой «улиткой Паскаля», он с детства оказался вовлеченным в научную работу. Первое исследование, касающееся природы звука, он проводит в 11 лет. С 14 лет он – непременный участник семинара **Марена Мерсенна**, впоследствии преобразованного в Парижскую Академию наук. Его первый труд «Опыт о конических сечениях» был издан, когда его автору было 16 лет, и содержал глубочайшие результаты, относящиеся к проективной геометрии. В 19 лет он изобретает вычислительное устройство, принцип работы которого в течение нескольких столетий будет использоваться в конструкциях арифмометров. А потом были еще блистательные работы в различных разделах математики, открытие основного закона гидростатики, книга «Мысли», которая вывела Паскаля в классики французской литературы и одного из крупнейших философов своего времени и многое, многое другое. К примеру, именно Паскалю принадлежит идея омнибуса, первого вида городского общественного транспорта, который начал работать в Париже в 1662 году. И это притом, что был он тяжело больным, практически парализованным человеком, прожившим всего 39 лет.

Однако в данном случае нас интересует предложенный Паскалем принцип математической индукции, широко используемый во многих доказательствах, касающихся бесконечных множеств. Пусть имеется бесконечное множество утверждений $P_1, P_2, ..., P_n, ...$. Предположим теперь, что утверждение P_1 является верным, а в случае справедливости утверждения P_n непременно оказывается верным и последующее утверждение P_{n+1}. Тогда все утверждения P_n будут истинными.

Докажем, к примеру, справедливость равенства

$$\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} = 2^n - 1$$

для всех значений n. Действительно, утверждение P_1 в данном случае соответствует истинному равенству $2^0 = 2^1 - 1$. Предположим теперь истинность P_n, то есть выполнение доказываемого равенства для некоторого номера n. Найдем значение

$$\sum_{k=1}^{n+1} 2^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} + 2^n.$$

Стоящая в правой части этого соотношения сумма равна $2^n - 1$ в силу условия P_n. В результате находим

$$\sum_{k=1}^{n+1} 2^{k-1} = 2^n - 1 + 2^n = 2 \cdot 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1.$$

Тем самым оказывается истинным утверждение P_{n+1} для рассматриваемой задачи, а значит, наша формула верна для всех n согласно принципу математической индукции.

Математическая индукция давала серьезный инструмент для работы с потенциальной бесконечностью. Справедливости ради, отметим, что элементами математической индукции владели **Евклид**, греческий философ V в. **Прокл**, а также средневековый еврейский мыслитель **Герсонид.**

Блез Паскаль внес также значительный вклад и в исчисление бесконечно малых. У истоков этого направления стояли выполненные в начале XVII в. работы **Иоганна Кеплера**, а также исследования **Бонавентуры Кавальери**, разработавшего метод неделимых. Этот метод стал своего рода обновленным вариантом атомистических воззрений Демокрита.

В разработке исчисления бесконечно малых принимали участие также **Джеймс Грегори**, **Исаак Барроу**, **Джон Валлис**, **Пьер Ферма**, **Рене Декарт** и другие математики середины XVII в. Кстати, именно Валлис ввел символ ∞ для обозначения бесконечности[3]. Вершиной этого направления являлась разработка основ дифференциального и интегрального исчисления **Исааком Ньютоном** и **Готфридом Вильгельмом Лейбницем**. Действительно, понятия производной и интеграла были напрямую связаны с потенциальной бесконечностью. В частности, в определении производной функции присутствуют сколь угодно малые приращения аргумента и соответствующие приращения функции, а в определении интеграла – сумма неограниченно возрастающего количества неограниченно убывающих величин. Тем самым в математику прочно вошли неограниченно возрастающие (стремящиеся к бесконечности) и неограниченно убывающие (стремящиеся к нулю) величины.

---

[3] ***Символ бесконечности***. Любопытно, что символ ∞ для обозначения бесконечности Джон Валлис ввел в 1655 г. в трактате под названием «*О конических сечениях*» (вспоминаем Аполлония, Дезарга и Паскаля). Имеется предположение о том, что этот символ восходит к древнему изображению уробороса – змеи, кусающей свой хвост.

Разработка математического анализа потребовала установления некоторых правил работы с неограниченно возрастающими или убывающими величинами. Вот пусть, к примеру, при x, стремящемся к некоторой точке x_0, значение функции $f(x)$ неограниченно возрастает, а $g(x)$ стремится к некоторой величине y. Тогда сумма $f(x)+g(x)$ будет стремиться к бесконечности, а частное $g(x)/f(x)$ – к нулю. Тем самым формально можно писать равенства $\infty+y=\infty$, $y/\infty=0$ для любого числа y. Если же обе величины $f(x)$ и $g(x)$ неограниченно возрастают, то суммы и произведения этих величин будут обладать теми же свойствами, то есть мы формально запишем $\infty+\infty=\infty$, $\infty\cdot\infty=\infty$. Но как будут вести себя отношения $f(x)/g(x)$? Как можно интерпретировать отношение ∞/∞? Ответ на этом вопрос совсем не очевиден.

В 1796 г. французский математик **Гийом де Лопиталь** издает первый учебник по математическому анализу под названием «*Анализ бесконечно малых*», в котором описано правило перехода к пределу в подобных выражениях, названное впоследствии правилом Лопиталя. Впрочем, Лопиталь отмечал, что результат этот в действительности принадлежит **Иоганну Бернулли**[4], ближайшему сподвижнику Лейбница. Согласно данному правилу, если значения дифференцируемых функций $f(x)$ и $g(x)$ стремятся к бесконечности (или к нулю) при x, стремящемся к некоторой точке x_0, то справедливо соотношение

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

К примеру, в случае $f(x)=x^2$, $g(x)=x+1$ находим значения производных $f'(x)=2x$, $g'(x)=1$. Очевидно, их отношение неограниченно возрастает с ростом x, а значит, отношение $f(x)/g(x)$ стремится к бесконечности. С другой стороны, при $g(x)=x^2+1$ отношение производных $f'(x)/g'(x)$ равно 1, а значит, $f(x)/g(x)$ также будет стремиться к единице при неограниченном возрастании x. Наконец, при $g(x)=x^3-x+1$ имеем $g'(x)=3x^2-1$. Отношение $f'(x)/g'(x)$ теперь равно $\dfrac{2x}{3x^2-1}$. При $x\to\infty$ мы

[4] ***Предельные теоремы теории вероятностей***. Семейство Бернулли выдвинуло из своих рядов около десятка крупных математиков, из которых трое по праву признаются великими. Помимо Иоганна таковыми считаются его сын Даниил, а также старший брат Якоб. С ***Якобом Бернулли*** связан еще один выдающийся результат, имеющий прямое отношение к проблеме бесконечности. Речь идет об одном из важнейших положений теории вероятностей – *законе больших чисел*. Он говорит о том, что частота появления некоего *события* при неограниченно возрастающем количестве испытаний стремится к вероятности появления этого события. Здесь потенциальная бесконечность (неограниченный процесс измерений) вторгается в мир случайных событий. Отметим в связи с этим также *центральную предельную теорему*, согласно которой суммарное действие неограниченно большого количества *случайных величин* при определенных условиях имеет распределение, стремящееся к *нормальному*. Первые результаты в этом направлении были получены в XVIII в. ***Абрахамом Муавром***, а также ***Даниилом Бернулли*** – сыном Иоганна и племянником Якоба. В дальнейшем эти результаты были усилены ***Пьером Симоном Лапласом*** и другими математиками.

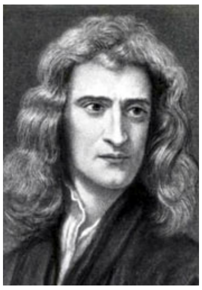
снова имеем дело с неопределенностью ∞/∞. Однако можно вновь применить правило Лопиталя, переходя ко вторым производным. В результате имеем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{6x}=0.$$

Правило Лопиталя расширяло представление о потенциальной бесконечности. Однако строгое определение предела, лежащее в основе математического понятия потенциальной бесконечности, было дано лишь спустя сто лет. Впервые это сделал в начале XIX в. великий чешский математик и философ **Бернард Больцано**. Однако его работа долгое время оставалась неизвестной. Так что математический мир узнал понятие предела от французского математика **Огюстена Луи Коши**, который пришел к своим результатам независимо от Больцано. Современное определение предела, использующее строгое определение действительных чисел, было дано еще позднее **Карлом Вейерштрассом.** Итак, последовательность $\{x_k\}$ сходится к значению x, называемому ее *пределом*, если для любого положительного числа найдется такой номер n, зависящий от ε, что справедливо неравенство $|x_k - x| \le \varepsilon$ для всех значений k, превышающих n.

После прояснения смысла предела потенциальная бесконечность в математике стала базироваться на прочном фундаменте. Но как же обстояло дело с актуальной бесконечностью?

Блез Паскаль (1623–1662)



Исаак Ньютон (1643–1727)

Иоганн Бернулли (1667–1748)

Огюстен Луи Коши (1789–1857)

3. Геометрия и бесконечность

Аристотель, описавший актуальную бесконечность, но отрицавший ее реальность, долгое время считался непререкаемым авторитетом. Так что бесконечность повсеместно понималась исключительно как не завершаемый процесс, но вместе с тем не реально существующий объект. Впрочем, знаменитый средневековый теолог **Фома Аквинский** писал, что актуальная бесконечность все-таки существует, и это есть Бог. Однако это утверждение нисколько не приближало к пониманию математической природы бесконечности. «Бесконечность распознаваема, но не познаваема», – писал **Рене Декарт**, один из крупнейших математиков и философов XIX в. Однако его современник **Жерар Дезарг** придерживался несколько иного мнения.

Дезарг разрабатывал основы *проективной геометрии*, изучающей, в частности, свойства геометрических объектов, сохраняющиеся при их проектировании. Это направление в значительной степени было стимулировано живописью. Действительно, как передать на картине перспективу? Над этим размышляли крупнейшие художники и архитекторы эпохи Возрождения **Филиппо Брунеллески**, **Пьеро делла Франческа**, **Леон Баттиста Альберти**, **Леонардо да Винчи**, **Альбрехт Дюрер**[5] и др. К примеру, изображая дорогу, уходящую в даль, следует нарисовать на холсте не две параллельные прямые, а линии, которые постепенно сближаются. И складывалось впечатление, что где-то там, за горизонтом, эти линии непременно сойдутся.

Возможно, первым глубокую мысль о том, что параллельные прямые пересекаются на бесконечности, высказал Иоганн Кеплер в 1604 г. Стоит ли этому удивляться? Блестящий астроном был еще и первоклассным математиком. Именно с него началось полномасштабное возрождение методов, которыми владели древнегреческие математики (прежде всего Архимед), что в итоге привело к разработке исчисления бесконечно малых. В его трудах можно увидеть зачатки теории экстремума (решение задачи о форме бочек максимальной вместимости и утверждение о том, что в окрестности экстремума функция практически не меняется), дифференциальных уравнений (восстановление кривой по известному семейству касательных), алгебры (симметрия кристаллов), топологии (задача об упаковке пространства шарами). Выход Кеплера к основам проективной геометрии был далеко не случайным.

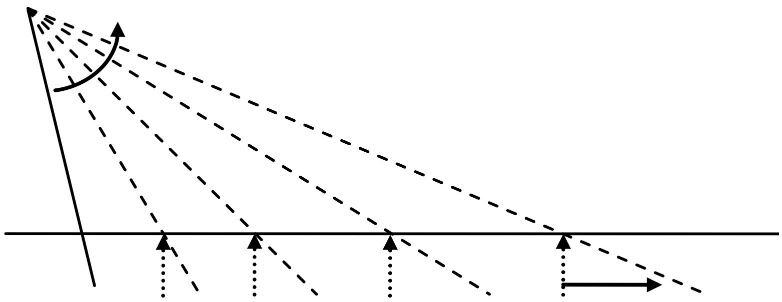
Истоком теории перспективы являлся глубочайший труд **Аполлония** «Конические сечения», вершина античной геометрии. Не зря и Дезарг, и Паскаль, и другие математики, работающие в области проективной геометрии, постоянно обращались к коническим сечениям. Но что же такое сечения конуса? Гипербола, парабола, эллипс. А что было главным открытием Кеплера? Утверждение о том, что орбиты планет представляют собой эллипсы. Кеплер изучал труды Аполлония и шел дальше. Его приход к проективной геометрии закономерен. Не зря он писал, что «геометрия есть архетип красоты мира».

Идеи Кеплера трудно переоценить. Однако содержательную геометрическую теорию с параллельными прямыми, пересекающимися в бесконечности, разработал всё-таки Дезарг. И, видимо, немалую роль здесь сыграло то обстоятельство, что сам он был архитектором, так что идеи великих мастеров Возрождения были ему чрезвычайно близки.

Рассмотрим две пересекающиеся прямые. Предположим, что одна из них фиксирована, а вторая – постепенно разворачивается, приближаясь к прямой, параллельной первой. Очевидно, точка их пересечения при этом постепенно удаляется. И, по-видимому, в тот момент, когда вторая прямая ста-

[5] ***Термин «бесконечный»***. Может показаться удивительным, но впервые этот термин «бесконечный» встречается не у кого-либо из математиков, а у великого немецкого художника Альбрехта Дюрера в 1525 г.

нет параллельной первой, точка пересечения уйдет в бесконечность. Так почему бы не предположить, что бесконечность реальна и геометрически соответствует тому месту, где сходятся параллельные прямые?



В геометрии Евклида две прямые, как правило, пересекаются, но в виде исключения могут и не пересекаться, если они параллельны. А проективная геометрия Дезарга исключений не знает. В ней любые две прямые непременно имеют точку пересечения, подобно тому, как через любые две точки всегда проходит прямая. За этим стоит *принцип двойственности*, один из глубочайших результатов проективной геометрии. Согласно этому принципу, любое утверждение на *проективной плоскости* останется справедливым, если в нем все точки заменить на прямые, а прямые на точки. Кстати, подобно тому, как через обычную точку может проходить бесконечное множество прямых, через бесконечную точку также проходит бесконечное множество прямых, которые параллельны между собой.

Однако здесь возникают определенные сомнения. Одна прямая может разворачиваться по отношению к другой прямой как по часовой стрелке, так и против часовой стрелки. Движения точки пересечения прямых вправо и влево равноправны. Так может быть, стоит добавить к плоскости не одну, а сразу две бесконечно удаленные точки, соответствующие «плюс-бесконечности и «минус-бесконечности»? Однако в этом случае окажется, что через эти две точки проходит не одна, а много параллельных прямых, а значит, единообразие точек на расширенной плоскости (после добавления к ней бесконечных точек) нарушится. Следовательно, бесконечная точка пересечения параллельных прямых должна быть единственной. Но это означает, что концы прямой… смыкаются на бесконечности, а сама прямая оказывается в определенном смысле аналогичной окружности.

Однако возникают новые вопросы. Пусть две параллельные прямые пересекаются в бесконечной точке x. Возьмем две другие прямые, параллельные между собой, но не параллельные двум первым. Между собой они пересекутся в той же самой точке x? Если это так, то мы выбираем по одной прямой из каждой пары. Получается, что они пересекаются в точке x, но и еще в какой-то обычной точке плоскости, поскольку они не параллельны друг другу. Но пересечение двух прямых сразу в двух точках представляется совершенно нереальным.

Остается признать, что существует не одна бесконечная точка, а целое множество таких точек, которое можно считать… бесконечной прямой. Тогда каждому семейству параллельных прямых на плоскости будет соответствовать конкретная бесконечная точка этой бесконечной прямой. И вот теперь уже принцип двойственности будет работать в полную силу, а любое утверждение, касающееся точек и прямых на проективной плоскости (обычных или бесконечных – не важно), не будет знать исключений.

Работы Дезарга в области проективной геометрии долгое время не получали должного признания. В геометрии того времени главным авторитетом считался Декарт, отдававший предпочтение аналитическим методам и скептически относящийся к работам Дезарга, хотя и поддерживавший с ним достаточно близкие отношения. Единственным исключением был юный гений **Блез Паскаль**, написавший под влиянием Дезарга свой первый научный труд «Опыт о конических сечениях».

После полутора веков застоя это направление было продолжено в работах **Гаспара Монжа** и, в еще большей степени, **Жана Виктора Понселе** в начале XIX в. Будучи военным инженером, Понселе участвовал в походе Наполеона в Россию. После тяжелого ранения он попал в плен. За два года в плену в Саратове он написал фундаментальный труд «Трактат о проективных свойствах фигур», после которого идеи проективной геометрии, и в частности расширение плоскости бесконечными точками, получили повсеместное признание.

Эти результаты в немалой степени перекликаются с работами **Бернхарда Римана**, который рассматривал расширенную комплексную плоскость, дополнив ее одной бесконечной точкой. И, кстати, если в вещественном анализе различают значения $+\infty$ и $-\infty$, то в комплексном анализе бесконечность не имеет знака.

А еще к Риману в определенной степени восходят представления о форме Вселенной. Является ли она бесконечной или она конечна, но лишь безгранична? Если бы мы жили в двумерном мире и он представлялся бы нам бесконечным лишь в том смысле, что, двигаясь в любом направлении неограниченно долго, мы никогда бы не достигли предела, то из этого не следовало бы, что наш мир действительно бесконечен. Поверхность очень большой сферы практически неотличима от плоскости. И здесь можно было бы вновь вспомнить практическую бесконечность. Но когда рассуждают о размерах Вселенной, то ее ассоциируют с трехмерной сферой, границей четырехмерного шара. Ее двумерным аналогом является сферическая поверхность, граница трехмерного шара, а одномерным – окружность, граница двумерного шара, то есть круга[6]. Внутренние свойства таких объектов в значительной степени характеризуются законами геометрии Римана.

---

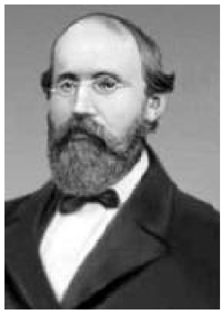
[6] ***Проблема Пуанкаре***. К характеристике трехмерной сферической поверхности имеет прямое отношение проблема, поставленная великим французским математиком ***Анри Пуанкаре***, включенная в состав «Проблем тысячелетия» и решенная не так давно ***Григорием Перельманом***.

Так бесконечность постепенно обретала реальность.

Иоганн Кеплер (1571–1630)

Жерар Дезарг (1591–1661)

Жан Понселе (1788–1867)



Бернхард Риман (1826–1866)

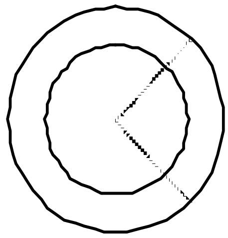
4. На пути к актуальной бесконечности

Риман родился примерно за двадцать лет до смерти Больцано, а умер примерно через двадцать лет после рождения Кантора. Как было бы интересно, если бы они встретились – Больцано и Кантор – два выдающихся математика XIX в., внесшие решающий вклад в познание актуальной бесконечности. Однако, прежде чем переходить к работам Больцано, нам предстоит вернуться на несколько столетий назад.

На первый взгляд, совершенно неожиданным оказывается интерес к проблемам бесконечности со стороны великого естествоиспытателя **Галилео Галилея**. Ему, в частности, принадлежит удивительно глубокая мысль о том, что чисел (речь идет о том, что мы называем натуральными числами) ровно столько же, сколько и их квадратов. Казалось бы, явный абсурд! Вот мы имеем числа 1, 2, 3, … и, с другой стороны, 1, 4, 9, … .

Понятно, что все числа второй группы присутствуют и в первой. Но, к примеру, числа 2, 3, 5 и многие другие заведомо не являются квадратами. Стало быть, первое семейство чисел, несомненно, шире второго. С другой стороны, каждому числу k из первой группы соответствует вполне определенное число k^2 из второй группы, а значит, квадратов никак не меньше, чем натуральных чисел. Нелепость? Но логика-то – безупречная. И как тут не вспомнить Зенона с его злополучным Ахиллесом, упорно бегущим за неуловимой черепахой.

Как пришел Галилей к этим соображениям? Одно из главных его открытий – это закон падения тел под действием собственного веса. Согласно этому результату путь, пройденный падающим телом, прямо пропорционален квадрату времени его движения. Здесь-то и могла возникнуть мысль о сопоставлении моментов времени (чисел) и соответствующих им расстояний (квадратов). И Галилей (физик-экспериментатор!) высказывает поразительно глубокую мысль о том, что при работе с бесконечными объектами привычные нам понятия «больше» и «меньше» теряют смысл… Не верьте ощущениям, логике надо доверять, – проповедовал когда-то Парменид, учитель Зенона.



А Галилей попутно отмечает, что две концентрические окружности имеют одинаковое количество точек. Действительно, соединив произвольную точку на большей окружности с центром, мы непременно пересечем меньшую окружность, а значит, каждой точке большей окружности соответствует своя собственная точка на меньшей окружности... Опять парадокс!

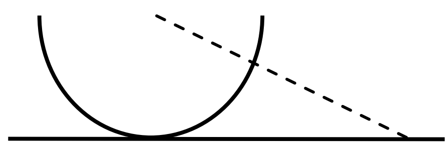
Одним из первых, кто открыто выступил в защиту актуальной бесконечности, был Лейбниц. Разрабатывая основы математического анализа, он считал бесконечно малые величины не абстракцией, характеризующей процедуру перехода к пределу, а реально существующими объектами. На философском уровне им соответствует понятие *монад* – неких элементарных объектов, из которых, по мнению Лейбница, всё и состоит. Однако в отличие от атомов Демокрита к ним неприложимы привычные характеристики обычных объектов – размер, форма и т.д. Лейбниц вплотную подошел к осознанию бесконечности как некоторой реальности[7]. Но решающий шаг на пути актуализации бесконечности сделал другой математик-философ – ***Бернард Больцано***, живший в первой половине XIX в. Ранее отмечалось, что именно Больцано первым дал безупречно строгое определение предела – математического воплощения идеи потенциальной бесконечности. С его помощью он впервые строго определил понятия непрерывной функции и ее производной, а также сходимости ряда. А затем Больцано фактически закладывает основы теории множеств. Следуя за Лейбницем, он признает правомочность понятия актуальной бесконечности и, что самое главное, описывает его математический смысл. Ключевым здесь оказывается понятие взаимно однозначного соответствия.

Рассмотрим, к примеру, некоторый треугольник *ABC*. Определим совокупности его вершин $X=\{A,B,C\}$ и сторон $Y=\{AB,BC,AC\}$. Отметим, что каждой вершине (например, *A*) можно однозначно сопоставить противолежащую сторону треугольника (в данном случае – *BC*). В этой ситуации говорят, что между сторонами и вершинами треугольника установлено *взаимно однозначное соответствие.* Однако понятие взаимно однозначного соответствия имеет смысл не только для конечных множеств.

[7] ***Нестандартный анализ***. Идея Лейбница о монадах, реально существующих бесконечно малых величинах, была реализована в 1961 г. американским математиком ***Абрахамом Робинсоном***. В его *нестандартном анализе* бесконечно малые понимаются не как переменные величины, значения которых неограниченно убывают (позиция потенциальной бесконечности), а как особый вид реально существующих чисел (позиция актуальной бесконечности). Робинсон рассматривает более широкое числовое множество, где нарушается *аксиома Архимеда*, являвшаяся со времен Евдокса основной при работе с потенциальной бесконечностью. Отметим мысль, высказанную в 1973 г. ***Куртом Гёделем***: «*Есть веские основания считать, что нестандартный анализ, в той или иной форме, станет анализом будущего*». И действительно, немалый интерес к концепциям нестандартного анализа проявляют в последнее время специалисты в области теоретической физики.

Рассмотрим, к примеру, совокупность всех натуральных (то есть целых положительных) чисел N, а также множество всех четных чисел M, то есть чисел, которые делятся без остатка на 2. Очевидно, между M и N также может быть установлено взаимно однозначное соответствие. В частности, любому натуральному числу n можно однозначно сопоставить четное число $2n$. Тем самым натуральные и четные числа оказываются в том же самом смысле эквивалентными, что и описанные ранее вершины и стороны треугольника. Однако совокупность всех натуральных чисел определенно шире, чем M. Любое четное число является натуральным, но не всякое натуральное число четно! Стало быть, целое оказывается эквивалентным своей части. Тот же самый эффект (но на менее строгом уровне) описывал Галилей. Однако Больцано подчеркивает, что совокупность всех натуральных чисел является реально существующим объектом, а значит, ему соответствует уже бесконечность актуальная, а не потенциальная.

Именно наличие взаимно однозначного соответствия между двумя окружностями объясняет ситуацию с другим примером, рассмотренным Галилеем. Однако Больцано получает еще более интересный результат. Рассмотрим некоторый отрезок. Его можно изогнуть так, чтобы получилась полуокружность. А теперь изобразим прямую, которая касается полуокружности в ее нижней точке. Соединим произвольную точку на прямой с центром окружности. Очевидно, соответствующий отрезок где-то пересечет полуокружность. Тем самым любой точке на полуокружности (изогнутом отрезке) соответствует в точности одна точка на прямой. Таким образом, мало того, что две различные окружности (а значит, и отрезки разной длины) эквивалентны. Конечный отрезок оказывается эквивалентным бесконечной прямой! Не зря Больцано назвал свой труд «*Парадоксы бесконечного*».

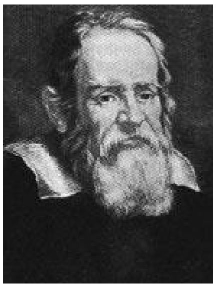


Описанные эффекты поясним еще одним эффектным примером, называемым *отелем Гильберта* и предложенным крупнейшим математиком XX в. **Давидом Гильбертом**[8]. Представим себе отель с бесконечным коли-

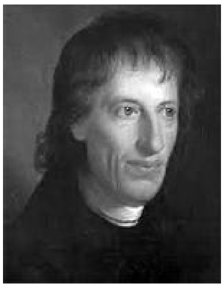
[8] ***Бесконечномерные пространства***. Отметим еще одно проявление бесконечности, лежащее в основе *функционального анализа*. Начиная с работ Ферма и Декарта в математике широко используется связь между аналитическими и геометрическими объектами. Так, число можно интерпретировать как точку на числовой прямой. Точка на плоскости характеризуется уже парой чисел, а в пространстве – тройкой чисел, являющихся ее координатами. Соответственно, точка в n-мерном пространстве может быть интерпретирована как n-мерный вектор. Начиная с Давида Гильберта, бесконечные объекты – последовательность, функция и т.д., которые никак не могут быть описаны конечным набором чисел, стали интерпретироваться как точки *бесконечномерных пространств*. Собственно, функцио-

чеством номеров. Появляется новый посетитель, а все номера уже заняты. В этих условиях администратор предлагает каждому из обитателей гостиницы переселиться в соседний номер: из первого во второй, из второго – в третий и т.д. В результате высвобождается одна комната, которую и занимает новый гость… Но тут появляется сразу сотня новых посетителей. Тогда администратор предлагает жильцам первого номера переселиться в комнату 101, второго – в комнату 102 и т.д. И опять освобождаются необходимое число мест для вновь прибывших гостей. Но вот прибывает сразу бесконечное множество гостей. Однако опытный администратор и здесь находит выход, переселив жильца первого номера во вторую комнату, второго – в четвертую, третьего – в шестую и т.д. И вновь все прибывшие посетители благополучно расселены. О, как была бы счастлива администрация любого нормального отеля, имей она такие возможности! Вот они, парадоксы бесконечности, в действии!

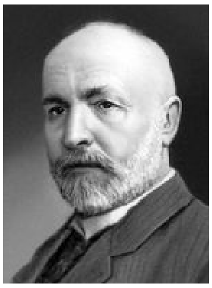
К сожалению, исследования Больцано не получили широкой известности. Однако многие его результаты были вскоре переоткрыты другими математиками. А во второй половине XIX в. **Георг Кантор**, двигаясь в том же направлении, разрабатывает свою поразительную теорию множеств. Математика, как никогда ранее, в максимальной степени приблизилась к своим основам.



Галилео Галилей (1564–1642)



Бернард Больцано (1741–1848)



Георг Кантор (1845–1918)

Давид Гильберт (1862–1943)

5. Множества и бесконечность

Бесполезно пытаться дать определение *множества*. Совокупность, семейство, класс – это всего лишь слова, являющиеся более или менее точными синонимами множества. Когда мы даем некоторое определение, мы сводим интересующий нас объект к чему-то уже известному. Это примерно как сводить доказываемое утверждение (теорему) к чему-то, доказанному ранее... Но как быть с предельно простым объектом, который уже не сводится ни к чему, поскольку проще ничего и нет?

Раз этот объект ни к чему не сводится, остается просто принять его существование как факт, как аксиому. Сам Кантор пишет: «*Множество есть многое, мыслимое как единое*». Однако данная фраза нисколько ситуацию не

нальный анализ и возник в процессе распространения аппарата классического математического анализа на объекты бесконечномерной природы.

проясняет. А потому просто смиримся с мыслью о том, что есть нечто такое, что и определить-то как следует нельзя, но к которому в конечном итоге должно всё сводиться. Это ничуть не хуже (но и не лучше!) апейрона Анаксимандра, атома Демокрита, монады Лейбница и других подобных же первичных объектов, встречающихся в трудах тех или иных мыслителей.

Пытаясь хоть как-то прояснить ситуацию, Кантор отмечает, что «*под множеством понимают объединение в одно общее объектов, хорошо различимых нашей интуицией*». Другими словами, множество обладает некоторой структурой, будучи составленным из каких-то *элементов*. А сравнивать два различных множества можно, устанавливая связь между их элементами. Тем самым вслед за Больцано Кантор приходит к понятию взаимно однозначного соответствия. Однако здесь он не останавливается, а идет дальше. Чувствуя необходимость непосредственной характеризации множеств, Кантор пользуется одним приемом, восходящим еще к Лейбницу, но строго определенным Гауссом. Поясним эту идею простым примером.

Рассмотрим множество всевозможных натуральных чисел. Назовем два числа эквивалентными, если они имеют один и тот же остаток от деления на 3. Тем самым все натуральные числа разбиваются на классы $\{1, 4, 7, 10, \ldots\}$, $\{2, 5, 8, 11, \ldots\}$ и $\{3, 6, 9, 12, \ldots\}$. Все элементы одного и того же класса имеют один и тот же остаток при делении на 3, а элементы разных классов – разные остатки. Обозначив через $[x]$ класс, которому принадлежит число x, мы можем сказать, что выражение $[x]$ (которому можно приписать некоторое название, например «остаток от деления на 3») является классификационным признаком конкретного числа x. И все числа, эквивалентные x (имеющие один и тот же остаток от деления на 3), и только они, имеют данный классификационный признак. Тем самым, вводя некоторый тип эквивалентности, мы непременно осуществляем классификацию имеющихся объектов. Описанная процедура называется *факторизацией*. По существу, факторизация – это математическое воплощение любой классификации. Впервые факторизацию использовал, по-видимому, великий немецкий математик **Карл Фридрих Гаусс**.

Итак, два множества эквивалентны, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие. Следовательно, можно выполнить факторизацию, сопоставив каждому множеству x некий классификационный признак $[x]$ так, что все эквивалентные между собой множества будут иметь один и тот же классификационный признак, а любые два неэквивалентных множества – различные признаки. Выражение $[x]$ Кантор называет *мощностью* множества x.

И вот тут-то выясняется, что множества бывают двух типов. Для одних множеств добавление нового элемента изменяет мощность множества, то есть расширенное таким образом множество оказывается не эквивалентным исходному. А вот для других множеств этого не происходит. Множества первого класса называются *конечными*, а множества второго класса – *бесконечными*. Конечные множества относительно малы так, что добавление нового элемента оказывается вполне ощутимым. А вот для бесконечных множеств ситуация иная. Еще Паскаль утверждал, что «*единица, прибавленная к бесконечному, ничем его не увеличивает*». Отметим, что определение бесконечного множества дал также современник Кантора **Рихард Дедекинд**.

Понятно, что любые два конечных множества эквивалентны в указанном смысле тогда и только тогда, когда они имеют одинаковое количество элементов. Таким образом, для конечного множества мощность фактически сводится к числу элементов. И когда, к примеру, мы на пальцах пересчитываем некоторые предметы, мы фактически устанавливаем взаимно однозначное соответствие между набором интересующих нас предметов и загнутыми пальцами.

Бесконечным оказывается всё множество натуральных чисел. Оно уже не эквивалентно никакому конечному множеству. Каждому элементу последнего можно сопоставить конкретное натуральное число, но в любом случае останутся натуральные числа, которым не соответствует ни один элемент данного конечного множества. Любое множество, эквивалентное в указанном смысле множеству натуральных чисел, Кантор называет *счетным*. Так, в примере Галилея счетным оказывается множество квадратов натуральных чисел.

А вот одно из величайших открытий Кантора! Оказывается, бесконечные множества бывают разными. Они могут различаться по мощности. В частности, Кантор доказывает, что множество чисел на отрезке [0, 1] не счетно.

Действительно, если оно счетно, то каждому натуральному числу k можно однозначно сопоставить некое число p_k из единичного отрезка. Любое число из отрезка [0, 1] может быть записано в виде десятичной дроби $0.abc\ldots$, где a, b и т.д. есть десятичные цифры. Пусть число p_k имеет вид $0.p_{1k}p_{2k}\cdots$. Определим число p из данного отрезка таким образом, чтобы его первая значащая цифра после десятичной точки была отлична от p_{11}, вторая – от p_{22}, k-я – от p_{kk} и т.д. Тогда число p отличается от p_1 по крайней мере в первом знаке, от p_2 – во втором знаке и т.д. Тем самым p, будучи элементом отрезка [0,1], не входит в последовательность $\{p_k\}$, которая содержала бы все числа из отрезка [0, 1], если бы они образовывали счетное множество. Стало быть, наша гипотеза о том, что множество чисел на отрезке [0, 1] счетно, оказалась неверной. Про отрезок [0, 1] и все равномощные ему множества говорят, что они образуют *континуум*. Это справедливо, в частности, для любого отрезка и даже всей прямой, как показал в свое время Больцано.

При определении мощности Кантор явным образом реализует принцип актуальной бесконечности. Бесконечные множества у него не только соответствуют реально существующим объектам (совокупностям всех натуральных чисел или всех точек на отрезке), но и могут быть предметом исследования[9]. В частности, они могут различаться между собой по свойствам, обладая той или иной мощностью. Кстати, Кантору принадлежит еще один важный результат.

Возьмем, к примеру, множество X, состоящее из некоторых элементов a, b и c. С его помощью можно строить различные *подмножества*, то есть части X. Таковыми будут множества, включающие в точности по одному элементу a, b или c, которых ровно столько же, сколько и элементов X. Однако подмножествами X будут и множества, состоящие из двух элементов, например, b и c. Тем самым совокупность всех подмножеств множества X имеет большую мощность, чем само множество X. Так вот, Кантор показывает, что этот результат остается в силе для любого (даже бесконечного!) множества, то есть мощность любого множества строго меньше мощности множества всех его подмножеств. Последний объект часто называют *булеа-*

---

[9] ***Трансфинитные числа***. Натуральные числа можно интерпретировать с двух точек зрения. С одной стороны, они характеризуют количества элементов тех или иных множеств, а с другой стороны, они устанавливают порядок расположения объектов. Эти две функции четко подразделяются в языке, где имеются количественные числительные «один», «два», «три», «четыре», а есть порядковые числительные «первый», «второй», «третий», «четвертый» и т.д. Мощности служат обобщениями количественных числительных на случай множеств общего вида, не обязательно конечных. Однако в 1883 г. ***Кантор*** вводит также понятие *порядковых типов*, которые служат аналогичными обобщениями порядковых числительных. Конечные порядковые типы представляют собой обычные натуральные числа, они же мощности конечных множеств. Наименьший бесконечный порядковый тип ω отождествляется с мощностью счетного множества. Как же определить последующий порядковый тип? Мы имели бесконечную последовательность $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$, которой ставится в соответствие порядковый тип ω. Но вот Кантор продолжает счет далее, рассматривая последовательность $M = \{1, 2, 3, \ldots, x\}$, добавляя к прежней последовательности еще один элемент x, не важно какой. Отметим, что множество M не эквивалентно N, поскольку в отличие от него имеет фиксированный последний элемент x. И Кантор ставит в соответствие множеству M порядковый тип $\omega+1$. Любопытно, что множество $L = \{x, 1, 2, 3, \ldots\}$ в смысле упорядоченности эквивалентно N, а не M, поскольку, подобно N, не имеет последнего элемента. Тем самым справедливо неравенство $1 + \omega \neq \omega + 1$, то есть на множестве порядковых типов сложение не коммутативно. Добавляя к множеству M в конце еще один какой-то элемент, получаем множество порядкового типа $\omega+2$. Аналогичным образом определяются порядковые типы $\omega+3$, $\omega+4$ и т.д., вплоть до $\omega+\omega$, что отождествляется с 2ω. Но к множеству такого порядкового типа можно в конце дописать еще один элемент, потом еще один и т.д., пока не получится множество с порядковым типом $\omega\omega$, который отождествляется с ω^2. Однако и это еще не предел, поскольку к множеству такого типа тоже можно добавлять в конце некоторый элемент… И процесс этот бесконечен. Бесконечные порядковые типы называются *трансфинитными числами*. Более подробно с этими вопросами можно познакомиться, например, в [18].

Любопытно, что в древнеиндийском трактате *Сурья-праджнапти-сутра*, относящемся к IV в. до н. э., все величины разделены на три категории, каждая из которых разбита на три подкатегории – перечислимые (малые, средние и большие), неперечислимые («почти неперечислимые», «истинно неперечислимые» и «неперечислимо неперечислимые») и бесконечные («почти бесконечные», «истинно бесконечные» и «бесконечно бесконечные»). Здесь не просто постулируются различные типы бесконечных объектов, но и дается их своего рода классификация в смысле перечислимости, то есть степени упорядоченности. Это в определенной степени напоминает порядковые типы Кантора.

ном в честь **Джорджа Буля**, одного из основоположников математической логики. При этом оказывается, что булеан множества всех натуральных чисел имеет мощность континуума. А вот булеан множества чисел на отрезке будет иметь еще большую мощность. Существует бесконечное множество различных мощностей, но максимальной мощности не существует. Достаточно перейти от любого данного множества к его булеану, чтобы получить множества более высокой мощности.

С теорией множеств актуальная бесконечность вслед за бесконечностью потенциальной обрела свое законное место в математике[10]. Оставалось, конечно, еще много неясностей. В теории множеств вскоре обнаружились странные парадоксы... Но это уже отдельный вопрос. А данную статью можно завершить словами **Давида Гильберта**: «*Бесконечность! Ни один вопрос не оказывал столь глубокого воздействия на человеческий дух, ни одна идея не стимулировала столь плодотворно интеллект человека, и, тем не менее, ни одно понятие не нуждается в прояснении так сильно, как понятие бесконечности*».

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белл Э.Т.* Творцы математики. – М.: Просвещение, 1979. – 256 с.
2. *Беляев Е.А., Перминов В.Я.* Философские и методологические проблемы математики. – М.: МГУ, 1981. – 216 с.
3. *Бурбаки Н.* Очерки по истории математики. – М.: ИЛ, 1963. – 292 с.
4. *Вавилов Н.А.* Не совсем наивная теория множеств. – Санкт-Петербург, 2008. – 474 с.
5. *Ван-дер-Варден Л.* Пробуждающаяся наука. – М.: ИЛ, 1959. – 462 с.
6. *Вейль Г.* Математическое мышление. – М.: Наука, 1989. – 400 с.
7. *Веселовский И.Н.* Архимед. – М.: Учпедгиз, 1957. – 111 с.
8. *Виленкин Н.Я.* Рассказы о множествах. – М.: Наука, 1969. – 159 с.
9. *Грасиан Э.* Открытие без границ. Бесконечность в математике. – М.: Де Агостини, 2014. – 144 с.
10. *Дуран А.* Истина в пределе. Анализ бесконечно малых. – М.: Де Агостини, 2014. – 114 с.
11. *Дэвис М.* Прикладной нестандартный анализ. – М.: Мир, 1980. – 236 с.
12. *Катасонов В.Н.* Боровшийся с бесконечным. – М.: Мартис, 1999. – 208 с.
13. *Клайн М.* Математика. Утрата определенности. – М.: Мир, 1984. – 448 с.
14. *Кольман Э.Б.* Бернард Больцано. – М.: Изд. АН СССР, 1955. – 224 с.
15. *Курант Р., Роббинс Г.* Что такое математика? – М.: МНЦМО, 2010. – 568 с.
16. *Куратовский К., Мостовский А*. Теория множеств. – М.: Мир, 1970. – 416 с.
17. *Лосев А.П., Тахо-Годи А.А.* Платон. Аристотель. – М.: Молодая гвардия, 1993. – 383 с.
18. Математика: границы и перспективы. – М.: Фазис, 2005. – 606 с.
19. *Медведев Ф.А.* Развитие теории множеств в XIX веке. – М.: Наука, 1965. – 232 с.
20. *Монастырский М.И.* Бернхард Риман. Топология. Физика. – М.: Янус-К, 1999. – 188 с.

---

[10] ***Фракталы***. Отметим еще один чрезвычайно любопытный математический объект, в котором реализуют идеи бесконечности, – это *фрактал*, множество, обладающее свойством бесконечного самоподобия. Понятие фрактала было определено в 1975 г. ***Бенуа Мандельбротом***.

21. *Нейгебауэр О.* Лекции по истории античных математических культур. – Т. 1. – ОНТИ, 1937. – 244 с.
22. *Никифоровский В.А.* Великие математики Бернулли. – М.: Наука, 1984. – 176 с.
23. *Панов В.Ф.* Математика древняя и юная. – М.: МГТУ, 2006. – 648 с.
24. *Парнов Е.* На перекрестке бесконечностей. – М.: Атомиздат, 1967. – 464 с.
25. *Пуркерт В., Ильгаудс Х.И.* Георг Кантор. – Харьков: Основа. 1991. – 128 с.
26. *Раик А.Е.* Очерки по истории математики в древности. – Саратов, 1977. – 370 с.
27. *Серовайский С.Я.* На пути к основаниям математики // Математика. Республиканский научно-методический журнал. – 2013. – № 1. – С. 23–26; № 2. – С. 14; № 3. – С. 12–14; № 4. – С. 14–16; № 6. – С. 37–39; 2014. – № 1. – С. 26–27.
28. *Сойер У.У.* Прелюдия к математике. – М.: Просвещение, 1972. – 192 с.
29. *Стиллвелл Дж.* Математика и ее история. – Москва; Ижевск: Институт космических исследований, 2004. – 530 с.
30. *Стюарт Я.* Концепции современной математики. – Минск: Вышэйшая школа, 1980. – 384 с.
31. *Тарасов Б.Н.* Паскаль. – М.: Молодая гвардия, 1982. – 334 с.
32. *Хартсхорн Р.* Основы проективной геометрии. – М.: Мир, 1970. – 160 с.
33. *Хофштадтер Д.* Гёдель, Эшер, Бах: эта бесконечная гирлянда. – Самара: Бахрах-М, 2001. – 752 с.
34. *Целищев В.В.* Философия математики. – Новосибирск: Наука, 2002. – 212 с.
35. *Шмутцер Э., Шютц В.* Галилео Галилей. – М.: Мир, 1987. – 143 с.
36. *Dauben J.* Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of Infinite. – Cambridge; L.: Harvard University Press, 1979.

ON THE DEVELOPMENT OF THE CONCEPT OF INFINITY IN MATHEMATICS

S.Ya. Serovaisky

The article offers a brief characterization of mathematical views on the concept of infinity. What is it, something absolute, all-encompassing and incomprehensible, which cannot be approached in principle, or just something quite particular and tangible, only very large? Or is it an unrestricted process or a reality possessing particular properties radically different from what we deal with in everyday life yet quite analyzable? Infinity pervades practically all the branches of mathematics, and mathematics itself is simply unthinkable in the absence of infinity.

Key words: mathematics, infinity, limit, geometry, set.

ИНФОРМАЦИЯ И РЕАЛЬНОСТЬ

В.Н. Катасонов

Общецерковная аспирантура и докторантура им. Святых равноапостольных Кирилла и Мефодия

В статье анализируется понятие информации в связке *восприятие – научная теория – информация*. Подчеркивается, что господствующий способ представления информации имеет существенно дискретный характер, что, естественно, связывает информацию с проблемами теории множеств. Показывается ограниченность дискретного подхода к описанию реальности, его недостаточность для изучения сознания и проблем духовной жизни. Информационная техника и само понятие информации выступают тем самым как одно из характернейших проявлений изоляционистских и кризисных тенденций современной цивилизации.

Ключевые слова: жизненный мир, информация, дискретность, непрерывность, актуальная бесконечность, философия сознания, вера, реальность, технологическая цивилизация.

Есть строгое, научное, математическое понятие информации. Но есть и мифология информации. Она возникает совершенно естественно постольку, поскольку новые технологии всегда порождают и связанную с ними мифологию. В той степени, в какой новые технологии имеют более или менее широкое применение, им всегда сопутствует и соответствующая мифология. Это происходит не первый раз. Например, на рубеже XIX–XX вв., когда закон о сохранении энергии твердо вошел в науку, а вскоре появилась и формула эквивалентности массы и энергии, в философии науки возникает мощное течение, которое называлось «энергетизм» (В. Оствальд и др.), сторонники которого объявляли, что всё есть энергия. Никакой материи, никакого вещества не существует, всё есть энергия.

Так и сегодня некоторые, так сказать, горячие головы говорят, что всё есть информация, не поля, не частицы, не материя, а всё на самом деле есть информация. Информация есть субстанция. Это и есть та новая мифология, которую мы должны простить культуре, без которой она, культура, собственно, и не существует.

Но более принципиальный вопрос – всякое ли знание есть информация? Я провожу здесь следующее трёхступенчатое разделение: *знание непосредственное, знание научное и информация*. Иногда все это называется одним словом информация. Но нам важно именно это различение. *Знание непосредственное*, скорее всего, можно соотнести с так называемым *жизненным* *миром* Э. Гуссерля, то есть с тем восприятием мира, который нам дан нашими непосредственными чувствами, восприятием, ещё не нагруженным всякого рода научными теориями, объяснениями и т.д. Конечно, жизненный мир Гуссерля – это непростая категория, нечеткая, достаточно путаная и у самого ее создателя, но, тем не менее, она в истории философии XX в. помогла поставить некоторые важные проблемы.

Второй уровень – это знание научное, то есть те научные теории, которые наука предлагает для объяснения тех или иных феноменов. И *третий уровень* – это уровень информации. Под информацией я здесь понимаю знание, которое уже перекодировано для использования машиной, то есть, другими словами, знание, которое выражено в виде этих файлов из нулей и единиц. Именно это конкретное понимание информации здесь для меня важно.

Научное знание, несмотря на всю свою логико-математическую строгость, всё-таки отличается от информации. Здесь всегда есть место неявному знанию (М. Полани), некоторой прагматической «ауре» навыков применения этого знания. Ученый (не преподаватель!) всегда смотрит на существующие теории как на одни из возможных на фоне конкурирующих теорий. Он знает, что эти теории развиваются, верифицируются и фальсифицируются, он может оценивать степень их достоверности. В силу теоремы Гёделя (как минимум!) движение этих научных теорий идёт не применением чисто формальных методов, а, вообще говоря, использованием видения с какой-то «внешней» точки зрения, которая, хотя и достаточно таинственна для науки, тем не менее, существует и активно значима. В этом смысле научные теории, наука как таковая, вся эта *машинария* науки, отнюдь не исчерпывается понятием *информация*. Информация – это есть уже формализованное знание – то, которое мы можем реализовать в конце концов в виде некоторого *алгоритма*.

Очень важный здесь для меня момент – это то, что информация выступает в *дискретной форме*. О роли этой дискретности в своё время, ещё в начале XX в., очень хорошо говорил А. Бергсон. Он подчеркивал, что в этой дискретности проявляется определённая тенденция нашего рассудка, которая как бы не позволяет нам встретиться с самой реальностью во всей полноте или, точнее говоря, стремится подменить эту реальность. Бергсон назвал это *кинематографическим эффектом*. Кинематографический эффект нашего рассудка, который стремится всё разложить в ряд состояний покоя, беспощадно искажает то естественное восприятие движения, естественное восприятие развития, которое необходимо связано с понятием реальности. Об этом писал, помимо Бергсона, и неокантианец Мейерсон, и ряд других философов XX в. Но я не могу сейчас здесь останавливаться на этом специально. Для нас важно здесь лишь то, что информация выступает именно в дискретной форме.

Конечно, дискретность информации так или иначе соотносится с пониманием того, что мы здесь всё сводим к числу. Мы говорим о *математиче-*

ской физике, мы говорим об обсчёте, в частности, информации или потока знаний, и всё выражаем через число. Вся эта традиция использования числа в естествознании укоренена ещё в античной культуре. От пифагорейцев нам достался тезис, что *всё есть число*. Но вопрос – какое число? Пифагорейцы и античная культура знали, собственно, только натуральное число, максимум – отношение чисел, рациональные числа, но античность не знала, – и, что важнее, не хотела знать! – иррационального числа.

Иррациональное же число – это принципиальная новация Нового времени, которое попыталось сделать арифметизацию геометрии (декартовская конструкция аналитической геометрии), а через геометрию арифметизировать и всю физику. И вся физика заговорила на языке математики, в отличие от традиционной аристотелевской физики, которая математику не использовала по принципиальным соображениям.

Главным препятствием на пути арифметизации и тотального применения числа в науке была проблема континуума: можно ли арифметизировать континуум, непрерывность. Новое время сначала просто предполагало это само собой разумеющимся (как делали изобретатели дифференциально-интегрального исчисления в XVII в.), потом эта проблема обсуждалась всё более бурно, и, наконец, к концу XIX в. трудами Дедекинда, Кантора, Вейерштрасса была построена теория действительных чисел. Иррациональные числа тоже стали называться числами.

Известный логик У. Квайн называет иррациональные числа *мифом*. Действительно, многие крупные математики XX в. относились с большим подозрением к концепции иррационального числа. Дело в том, что эта концепция использует понятие актуальной бесконечности, но с понятием актуальной бесконечности связано множество апорий, и поэтому именно здесь как раз и разворачивается вся критика, здесь разворачиваются все серьёзные проблемы, связанные с понятием иррационального числа.

В особенности, конечно, это было обусловлено тем проектом, который выдвинул создатель теории множеств Георг Кантор. Его проект был достаточно радикальный, он хотел вообще свести всю науку, всё естествознание к исчислению теории множеств. Не только математику, но и физику. Всю физику, считал Кантор, механику и физику видимого мира должны охватывать множества мощности алеф-нуль. А физика эфира (в то время ещё была принята концепция эфира, во всяком случае некоторыми учёными), уже требует, де, множеств мощности алеф-один.

Хотя все эти проекты так и остались только благими пожеланиями, тем не менее, нельзя не отметить, что Кантор пытался сделать радикальный вывод из той тенденции, которая существовала в новой европейской науке начиная с XVII в. Тенденция эта была – редукционизм, сведение сложного к простому. Ее зачинателем был Рене Декарт. Так вот, Кантор хотел любое сложное вообще рассыпать в песок простых элементов теории множеств, любая сущность должна была складываться из этих элементов, любая сущность – представляться как некое множество (подробнее см. [1]).

Подобные проекты Кантор предлагал не только в физике, но, например, и в искусстве. Надо сказать, что в некоторых областях они фактически реализовались. Можно сказать, что сегодняшняя телевизионная развёртка, которая с каждой точкой связывает две ее координаты и какое-то конечное количество цветов, которые могут быть здесь представлены, есть определенная реализация Канторовского «N-кратно упорядоченного множества». Автор теории множеств считал, что через подобные множества можно любое произведение искусства представить в виде некоторого кратно упорядоченного множества.

Кантор продолжал ту линию, которая, как представляется, изначально в той или иной сознательной форме проявлялась в науке Нового времени потому, что идея знания как исчисления была очень популярна в XVII в., и даже ещё раньше начиная где-то с XIII в., с Раймонда Луллия. Во всяком случае, Гоббс уже говорит, что *мышление есть исчисление*: как мы соединяем два числа, так мы соединяем и две идеи, это и есть синтез идей. Лейбниц был просто одержим идеей найти универсальное исчисление и все задачи свести к некоторому применению универсального алгоритма. Именно эта идея, найти исчисление, которое бы *чисто формально* «решало все задачи», как писал один из создателей современной алгебры Франсуа Виет ещё в конце XVI в., нахождение универсального алгоритма, соединилась с начала XX в. с идеей теории множеств и поставила проблемы алгоритмической разрешимости.

Не обсуждая эти проблемы, уделим внимание проблеме арифметизации континуума. Континуум через концепцию действительного числа был представлен как некоторая конструкция в рамках множества натуральных чисел или целых чисел. Очень часто встречаешься с тем, что учёные почти однозначно так понимают континуум, что континуум есть то, что описал Дедекинд или Кантор. Однако следует отдавать себе отчет, что есть идея континуума, а есть его математическая модель. Это разные вещи. Континуум, которым пользуется традиционная математика, континуум Дедекинда, Кантора, Вейерштрасса – это есть лишь *некоторая модель континуума*. *Идея же континуума*, идея *непрерывности* – гораздо сильнее. Континуум выражает идею всеобщей связи. Противоположностью является дискретность, разобщенность, а континуум выдвигает идею всеобщей связи, но эта связь может быть более или менее интенсивной. Более интенсивный уровень связи континуума – это уже есть не пространственное разделение элементов, а когда все оказываются рядом со всеми, и, тем не менее, это разные элементы.

Что могло бы быть моделью такого континуума, чтобы можно было как-то представить это аудитории? Скорее всего – это сознание. Сознание есть удивительная и таинственная вещь: с одной стороны, это некое множество, но в то же время это всё множество в единстве, здесь всё соединено. Человеческая душа, она вроде бы даже как-то и распределена по телу, но в то же время это моя единая душа, везде тождественная себе, что и делает классическую психофизиологическую проблему столь сложно разрешимой: тело, оно в пространстве, а душа, вообще говоря, нет.

Итак, идея континуума имеет гораздо более интенсивное своё выражение в сознании, понимаемом как одна из моделей, одно из воплощений этой идеи. И как только мы заговорили о сознании, естественно, заговорить о духе, ещё более едином принципе, ещё более единой сущности, и, наконец, о Боге. Бог как Дух. Богословские споры о том, в какой степени душа духовна, а в какой степени она всё-таки пространственна, все, по-существу, об этом. «Сколько ангелов поместится на кончике иглы?» – этот вопрос средневековой теологии как раз о том, насколько духи невидимого мира пространственны, насколько они едины. Вероятно, всё-таки, здесь существует некоторая шкала степеней, но только ясно, что Бог – это уже абсолютный дух, он вне пространства и вне времени. Но дух с такими парадоксальными свойствами, что это единая Субстанция, но три Лица.

Современные информационные технологии игнорируют проблему непрерывности, они традиционно пытаются свести все к дискретности. Но то-то и оно, что вопрос «Действительно ли знание, получаемое нами о мире, дискретно?» остается без ответа. Более того, многое свидетельствует о том, что непрерывность играет не менее важную роль в строении мира, чем и дискретность. Если дискретность выражает оформленность мира, его определенность, то непрерывность выражает всеобщую связь и зависимость в мире. Дискретность и непрерывность как общие диалектические категории важны, так же как форма и материя, мужское и женское. И обе эти категории играют существенную роль и в нашем восприятии мира, и в самой природе знания.

Более того. Категория непрерывного тесно связана с понятием *веры*. «Верую!» – говорит верующий в Символе веры. Вера, по определению апостола Павла, есть «…осуществление ожидаемого и уверенность в невидимом» (Евр. 11:1). Несмотря на русские слова (перевода!) *осуществление* и *уверенность*, можем ли мы сказать, что вера есть вещь, наличие которой можно однозначно констатировать в терминах «да» или «нет»? Или на языке информатики, записать единицу, если вера есть, и ноль, если ее нет? Думаю, что нет. Евангельская история о несчастном отце больного сына говорит нам: «Иисус сказал ему: если сколько-нибудь можешь веровать, всё возможно верующему. И тотчас отец отрока воскликнул со слезами: верую, Господи! помоги моему неверию» (Мк. 9:23-24). Мы видим, сам Иисус Христос констатирует, что существуют разные степени веры («…если сколько-нибудь можешь веровать…»). С другой стороны, и отец свидетельствует своими словами, что вера не есть наличная вещь, она связана с сомнением и с усилием… И как же все это выразить в терминах «да» и «нет»? Мы видим, что этот язык в принципе недостаточен для выражения жизни веры, которая, как жизнь вообще, требует присутствия непрерывного.

Это обсуждение приводит нас к соотнесению мира науки и мира Божьего, мира, как его мыслит наука, и мира, как его создал Бог. Вообще, наша цивилизация в этом смысле, включая и ту тему, которую я обсуждаю, оказывается созданием нового *искусственного* мира. Вот в аудитории я читаю лекцию. Обычно в ней почти нет ничего естественного. И даже, без «почти», ничего естественного: и электричество, и эти краски, и эти искусственные материалы стен, столов и т.д. – это всё созданные человеком искусственные вещи, которые не встречаются сами по себе в природе. И информационные технологии – всё это также создания искусственной, новой природы. Только остаётся задать вопрос, как мы, люди, возникающие по естественным законам, вообще здесь оказались, среди всего этого «пиршества» искусственно сфабрикованных вещей? В этом и заключается парадокс нашей цивилизации, что весь этот искусственный тоталитарный мир создает сам человек.

Как известно, в советское время в 1920-х гг., в тюрьмах, где также должна была «восторжествовать» новая пролетарская мораль, кое-где энтузиасты этой новой морали пытались реализовать ту идею, что советскому заключённому, де, не нужно охранников, советский заключенный и так, мол, сознателен, и должно быть *самоокарауливание*. От идеи, конечно, довольно быстро отказались, но любопытно то, что это своеобразное самоокарауливание и осуществляется человеком в нашей цивилизации. Мы сами создаём этот искусственный мир, эту своеобразную *клетку*, которая нас отделяет от мира Божьего, от мира естественного. Создаем мир, который оборачивается экологическими проблемами и катастрофами, грозит нам тяжелейшими социальными проблемами и, парадоксально, ставит постоянно человечество на грань выживания… Конечно, человек и здесь пытается, как говорится, сделать какой-то *оживляж*, подсластить себе пилюлю идеей комфорта, но, вообще говоря, рядом с миром естественным это сплошь и рядом выглядит не просто в высшей степени ненатуральным, но нередко и очень пошлым. Например, так называемые фильмы в 3D и т.д.

Культура, конечно, очень чутко относится ко всему этому. В сегодняшней культуре немало всякого рода цивилизационных фобий, все эти фильмы, фантастика о восстании машин и т.д. То есть человек подсознательно чувствует, что, вообще говоря, то направление цивилизации, которое мы реализуем, включая и информационные технологии, не совсем естественное, если даже не противоестественное, во всяком случае, экологические кризисы, обусловленные таким развитием цивилизации, прямо указывают на это. Причем информационные технологии, конечно, гораздо опаснее всего того, что было прежде. Они не просто создают новую искусственную среду для нашего тела, они уже внедряются в наше сознание, они требуют, чтобы мы *мыслили* по законам машин. Компьютерный интерфейс требует, чтобы мы мыслили так, как мыслит машина, чтобы мы говорили на языке машины, на языке логических деревьев. Поэтому, конечно, здесь налицо *кризис цивилизации*, и в нём серьёзнейшую роль играют новые информационные технологии.

О возможности другой цивилизации написано в других статьях, в частности в [2], а здесь необходимо ещё раз подчеркнуть, что есть некоторое внутреннее основание в природе самих информационных технологий, которые создают границу для их применения в познании. И когда мы эту границу не учитываем, мы начинаем насиловать человеческую природу, безрассудно перестраивать ее и терять то, что нам дано Богом. А это добром не может кончиться…

ЛИТЕРАТУРА

1. *Катасонов В.Н.* Боровшийся с бесконечным. Философско-религиозные аспекты генезиса теории множеств Г. Кантора. – М., 1994.
2. *Катасонов В.Н.* О возможности иной цивилизации в свете опыта святых. URL: www.katasonov-vn.narod.ru

INFORMATION AND REALITY

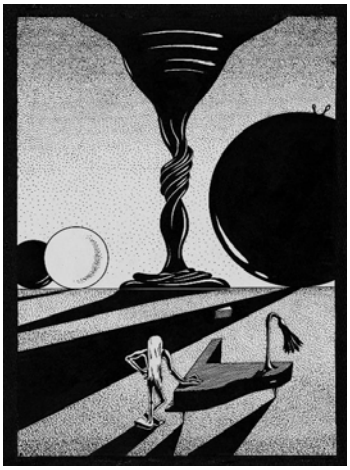
V.N. Katasonov

The paper deals with the concept of information as a member of chain: perception – scientific theory – information. It is underlined that the dominating way of the information representation has essentially discrete character which naturally connects the information with the problems of the theory of sets. Limitations of the discrete approach to the description of reality, its insufficiency for studying of consciousness and problems of spiritual life are shown. The use and abuse of the information technics and concept of the information itself display, thereby, the most characteristic expressions of crisis tendencies of modern civilisation.

Key words: the vital world, information, discreteness, continuity, actual infinity, philosophy of consciousness, faith, reality, technological civilisation.

МЕТАФИЗИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ МАТЕМАТИКИ

ПРЕДУСТАНОВЛЕННАЯ ГАРМОНИЯ ВО ВЗАИМОДЕЙСТВИИ МАТЕМАТИКИ И ФИЗИКИ



В.Я. Перминов

Философский факультет Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова

В статье рассматриваются вопросы, связанные с объяснением эффективности практического применения результатов математики. Предлагается подход к объяснению этого явления, основанный на теории А.Н. Бернштейна о приспособлении живых организмов к среде на основе модели потребного будущего

Ключевые слова: математическая абстракция, математическое предвосхищение, искусственная система, модель «потребного будущего», интуиция, социальный инстинкт, неосознаваемые критерии отбора.

Внутренние объекты математики являются свободными в том смысле, что они не связаны в обязательном порядке с какими-либо образами, имеющими опытную основу. Но эти объекты, первоначально далекие от содержательных интуиций, как правило, получают впоследствии эмпирическую интерпретацию и оказываются применимыми к описанию тех или иных аспектов физической реальности. Обнаруживается, таким образом, некая гармония между математикой и сферой эмпирических представлений, которая выражается в том, что внутренние объекты математики, будучи независимыми от опыта в своем формировании, обнаруживают тяготение к реализации в содержательных теориях; эти объекты как бы находятся в поле тяготения и направляются в своем формировании запросами опытных наук. Мы называем это явление по-разному: опережающее развитие математики, математическое предвосхищение, предустановленная гармония между математикой и физикой и т.п. Но все эти названия обозначают лишь тот несомненный факт, что внутренние конструкции чистой математики, появляющиеся вне связи с каким-либо опытом, реализуются затем в теоретических построениях физики и других опытных наук. Гносеологическая проблема состоит в том, чтобы уяснить механизм этого явления, понять, каким образом свободное развитие математики оказывается способным предвосхищать теоретические построения опытных наук.

Это явление было ясно осознано учеными еще в начале прошлого века, но оно все еще не получило удовлетворительного объяснения. Предлагаемые ниже соображения представляют собой попытку взглянуть на это явление с точки зрения общих биологических и психологических предпосылок человеческого мышления.

1. Уточнение вопроса

Математика представляет собой некоторого рода концептуальную пирамиду, которая со временем становится все более и более высокой и все более удаленной от опыта в своих внутренних понятиях. На базе имеющихся объектов и операций вводятся другие объекты и операции, не связанные с интуитивной основой исходных объектов. Это движение от конкретного к абстрактному, от интуитивно к чисто логическому и формальному подтверждается множеством примеров. Поиски решений кубического уравнения в радикалах привели в XVI в. к введению мнимых чисел, попытки обосновать пятый постулат Евклида завершились созданием неевклидовой геометрии, аналитическое выражение отношений трехмерного евклидового пространства привело к идее пространства многих измерений. В свое время Лейбниц называл такого рода производные объекты (он говорил о мнимых числах) «полезными фикциями», которые сами по себе ничего не означают, но необходимы для решения задач. Л. Карно считал, что в математике вводятся два рода «количеств»: количества реальные (означенные), обладающие содержательным смыслом, и количества фиктивные (неозначенные), принимаемые только в качестве средства решения задач. В качестве примеров объектов первого типа он указывал на натуральные и дробные числа, в качестве примеров вторых – мнимые числа и бесконечно-малые в математическом анализе.

Последующее развитие математики показало, однако, что образы, которые Карно считал чистыми фикциями, в действительности не остаются навсегда в своей чисто операциональной роли, а, как правило, находят содержательную интерпретацию и переходят в сферу образов, имеющих означенность и прикладное значение. Определения чистой математики начинают выступать теперь в качестве готовых форм для вновь открываемых конструкций физики.

На эту особенность взаимодействия математики и физики обратил внимание Ф. Клейн в своей статье «О геометрических основаниях лоренцевой группы» (1910). Он писал: «Профан заранее мало склонен приписывать какую-нибудь ценность занятию проблемами, которые возникают прежде всего лишь из субъективного, так сказать, эстетического стремления к познанию математики. Но история науки показывает, что дело обстоит совершенно иначе. Это большая тайна, которую трудно выразить словами. Я скажу лишь, что все то, что здорово в математическом отношении, рано или поздно приобретает значение, далеко выходящее за пределы его первоначальной области. Такова судьба теории конических сечений, которую развили греческие геометры ради нее самой и которая вместе с открытием кеплеровских законов получила внезапно величайшее значение для нашего понимания природы» [1. С. 157]. Д. Гильберт считал, что в развитии математики осуществляется лейбницевская «предустановленная гармония». Указывая на единство законов природы как на некоторого рода трудно объяснимый факт, он писал: «Но еще большее впечатление производит явление, которое, заимствуя терминологию Лейбница, мы называем «предустановленной гармонией». Оно является прямым воплощением и реализацией математических идей. Древнейшими ее примерами служат конические сечения, которые были изучены намного раньше, чем мы успели составить себе представление о том, что планеты и даже электроны движутся по эллиптическим орбитам» [2. С. 460]. На эту же особенность взаимосвязи математики и физики указывал А. Эйнштейн в своей речи о Кеплере (1930). «К восхищению перед этим замечательным человеком, – говорил Эйнштейн, – добавляется еще чувство восхищения и благоговения, по отношению не к человеку, а к загадочной гармонии природы, которая нас породила. Еще в древности люди придумали кривые, которые соответствовали простейшим законам. Наряду с прямой и окружностью среди них были эллипс и гипербола. Последние мы видим реализованными в орбитах небесных тел, во всяком случае, с хорошим приближением. Представляется, что человеческий разум должен свободно строить формы, прежде чем подтвердится их действительное существование» [3. С. 123–124].

Здесь можно привести также высказывание выдающегося французского математика Ж. Дьедонне, в котором дана общая характеристика этого явления. «В совсем недавнее время, – пишет Дьедонне, – мы были свидетелями неоднократно повторявшейся ситуации, непостижимой для физиков и философов, когда с удивлением замечают, что математический аппарат, необходимый для развития появившихся революционных концепций современной физики, таких как теория относительности и квантовая механика, уже задолго до их рождения был создан и развит в связи с внутренними проблемами математики, вне каких-либо подозрений, что этот аппарат может когда-нибудь получить другое приложение» [4. С. 20].

В начале 1960-х гг. нобелевский лауреат по физике Е. Вигнер написал статью «Непостижимая эффективность математики в естественных науках», которая получила широкую известность и многочисленные комментарии. Вигнер более конкретно подошел к анализу процесса взаимосвязи математики и физики и выделил несколько его аспектов, нуждающихся в объяснении. Основные моменты опережающего развития математики, по Вигнеру, следующие.

1. Случаи, когда математическое понятие получает применение далеко за пределами своей первоначальной сферы. В качестве примера может быть взято число π, которое в своем исходном значении относилось только к геометрии, но затем стало использоваться во всех математиках и математической физике.

2. Случаи, когда мы извлекаем из уравнений то, что мы в них не вкладывали. В качестве простого примера можно указать на ньютоновский вывод закона всемирного тяготения из законов Кеплера.

3. Случаи, когда математическая форма закона, установленная на некоторой ограниченной эмпирической и интуитивной основе, получает статус универсального принципа, выполняющегося с поразительной точностью. Примером может служить ньютоновский закон всемирного тяготения, а также и уравнение Шредингера, выведенное на основе умозрительных гипотез Луи де Бройля.

В своей статье «Внутреннее видение, внешняя истина» (2006) Ройбен Херш задает несколько близких по смыслу вопросов, предельно заостряющих проблему. Чем объяснить, что открытия в чистой математике оказываются так хорошо применимыми в физике? Как могут математические открытия оказаться непреднамеренно, постфактум, частью физики? Как могло случиться, что кривые, столь необходимые Кеплеру, были придуманы Аполлонием 1800-1900 лет до этого? Как математические открытия, сделанные без расчета на применение, оказываются применимыми в естественных науках? (см. [6. P. 320–338].)

Если говорить в целом, то мы имеем то положение, что понятия и образы математики, сформировавшиеся внутри математики, в интересах ее собственного развития и определенные из соображений чисто логических, обнаруживают затем способность получить содержательную интерпретацию и стать частью прикладной математики. Факторы, определяющие эту тенденцию, нам малопонятны, и мы вслед за Вигнером можем говорить здесь о непостижимой эффективности математики в плане непредсказуемого вхождения ее абстрактных структур в структуру теоретической физики.

2. Подходы к объяснению

Особенность этого явления состоит в том, что до настоящего времени никто не представил его убедительного объяснения. Мы можем, однако, указать на несколько подходов, заслуживающих обсуждения.

1. Существуют попытки натурфилософского объяснения этого явления, исходным пунктом которых является утверждение некоторой изначальной гармонии природы и мозга как части этой природы. В 50-х гг. эту идею развивал французский инженер и философ Андре Ламуш. Согласно Ламушу, три основные сферы реальности – неживая природа, жизнь и мышление – подчинены единому ритму, который, в свою очередь, определен принципом

экономии средств. Во всех этих сферах действует аналогичный механизм появления нового, а именно синтез новых элементов из существующих, уже имеющихся, в соответствии с правилами композиции и подобия. Свободное конструирование в математике, с этой точки зрения, с высокой вероятностью остается в пределах форм, реализуемых природой, поскольку оно неизбежно имитирует способы конструирования природы [7, ch. 2]. Человеческий интеллект, по Ламушу, в принципе не может создать ничего такого, что не нашло бы реализации в сфере опыта.

2. Е. Вигнер, детально разъяснив явление непостижимой эффективности математики, устранился от выдвижения каких-либо гипотез относительно его истоков. Это явление для него – только «эмпирический закон эпистемологии», то есть некоторый факт, который должен быть принят как непосредственная данность. Эмпирический закон эпистемологии, по Вигнеру, это такой же чудесный дар, как и сама способность человеческого интеллекта открывать точные закономерности в окружающем нас сложном мире или его способность нанизывать цепочки из 1000 и более аргументов, не впадая в противоречие. «Математический язык, – пишет он, – удивительно хорошо приспособлен для формулировки физических законов. Это чудесный дар, которого мы не понимаем и которого не заслуживаем. Нам остается лишь благодарить за него судьбу и надеяться, что и в будущих исследованиях мы сможем по-прежнему пользоваться им» [5. С. 197]. Эмпирический закон эпистемологии, – говорит он, – это догмат веры физиков-теоретиков, который мы должны понимать как безусловную предпосылку физического мышления. В плане возможности объяснения этого догмата Вигнер скорее скептик. Он исходит из того, что имеются некоторые способности человеческого разума вроде способности нанизывать без противоречия тысячи доводов, которые должны быть приняты как факт природы и которые не допускают какого-либо собственно теоретического обоснования.

3. М. Клайн в своей книге «Математика: утрата определенности» (1980) намечает объяснение эффективности математики на основе гипотезы о неизбежной генетической связи математических понятий с опытом в самом процессе их формирования. По его мнению, Вигнер и его последователи мистифицируют факт приложимости абстрактной математики вследствие того, что они принимают на веру ложную гипотезу о полной независимости абстрактной математики от опыта. В реальной истории математики, считает он, мы никогда не имеем идеальной чистоты математических идеализаций. По мнению чистых математиков, говорит Клайн, конические сечения появились в Древней Греции исключительно ради удовлетворения чисто математического интереса. Но это ошибка. В действительности, они появились впервые в работах, посвященных конструкции солнечных часов, то есть в тесной связи с опытом. Аналогичное эмпирическое опосредование, считает он, можно обнаружить также и при формировании неевклидовых геометрий, теории групп и всех других образов внутренней математики. Подлинно чистой математики, совершенно свободной от эмпирических интуиций, по

Клайну, никогда не существовало, а если бы она и существовала, то она действительно не имела бы никаких приложений. Относительно Харди и Диксона как проповедников чистой математики он пишет: «Харди и Диксон могут покоиться с миром. Их чистая математика, как и всякая математика, созданная ради самой себя, почти заведомо не найдет никаких приложений» [8. С. 343]. Клайн, таким образом, пытается демистифицировать предустановленную гармонию Вигнера, сводя ее лишь к тому явлению, что математические идеализации, формирование которых было стимулировано опытом, затем находят приложения в другой сфере опыта. Он считает, что все продуктивные идеализации математики в своей основе мотивированы опытом, и факты непредвиденного воздействия математики на физику говорят лишь о том, что «математика возвращает свой долг естествознанию» [8. С. 342].

4. Подход, близкий к подходу Клайна, реализуется в методологических работах Вл.П. Визгина. По мнению Визгина, становление каждой как угодно абстрактной, математической концепции скрытым образом опосредовано некоторыми физическими соображениями, и последующее использование этой концепции в физике представляет собой не что иное, как «возвращение долга» физике со стороны математики. Мистические стороны эффективности абстрактной математики, считает он, немедленно исчезают при историческом анализе, который может выявить физические интуиции, определившие становление данной математической концепции [9. С. 35]. В более поздних статьях на эту тему Вл.П. Визгин усложняет свою позицию, включая в процесс взаимодействия математики и физики промежуточную инстанцию, обладающую одновременно как свойствами математической, так и свойствами физической теории. Особую роль в этом отношении он приписывает аналитической механике, которая, сформировавшись исторически в качестве математической формализации механики, приняла на себя функцию соединения новых математических структур с физическими структурами. «Феномен «непостижимой эффективности в математике», который Вигнер назвал «эмпирическим законом эпистемологии», – пишет Визгин, – в свете критериев Фейнмана и Лакатоса становится несколько более понятным: математические структуры, в значительной степени порожденные механикой через посредство аналитической механики, возвращают свой долг, но не столько механике, сколько физике, вышедшей за механические рамки» [10. С. 286].

В этом новом варианте объяснения абстрактные математические структуры входят в физику вследствие их связи с аналитической механикой, которая является одновременно и объектом физики, и объектом математики. Визгин говорит о полисемантичности аналитической механики, которая является одновременно и частью языка физики, и частью языка математики. Основная его идея состоит в том, что все абстрактные структуры математики находят прямое или косвенное применение в аналитической механике, и вследствие этого они входят и в аппарат других физических теорий.

5. А.А. Григорян выдвигает оригинальное объяснение феномена математического предвосхищения, которое можно назвать логико-генетическим. Он исходит из двух достаточно очевидных фактов. Первый из них состоит в том, что между используемой математикой и физикой существует логический параллелизм, заключающийся в том, что для данной физической теории необходим вполне определенный тип математического формализма, к примеру, механике – дифференциальные уравнения и т. п. Второй факт заключается в том, что имеют место существенные различия в условиях и темпах развития математических и соответственно физических теорий. Конкретная физическая теория, считает Григорян, получив математическое оформление, как правило, входит в этап консервативного развития и достаточно длительное время остается в рамках той же математической формы, которую она получила в процессе своей формализации. Напротив, сама математическая же форма, будучи свободной от физических предпосылок, сразу же становится объектом математического исследования и развертывает систему родственных теорий, являющихся логической трансформацией исходной математической теории. Феномен математического предвосхищения, по Григоряну, является следствием этого опережающего развития математики: когда физическая теория на основе своих внутренних стимулов снова вступает в фазу обобщений и запроса на новые математические модели, то эти модели оказываются уже подготовленными в математике, полученными в процессе ее свободного, чисто логического развития [11. С. 131].

Другая идея Григоряна состоит в понятии структурирования первичных математических отношений. Каждое отношение, включенное в понимание какой-либо «опорной» (практически значимой) проблемы, постепенно развертывается в целостную систему понятий, раскрывающих это понятие на более абстрактном уровне. Так, представление о непрерывности структурируется в понятиях непрерывности, бесконечно малой величины, предела и окрестности. Абстрактные понятия математики, в соответствии с этой идеей, никогда не являются формальными и абсолютно чистыми, ибо они всегда являются продуктами последовательного структурирования некоторых базовых и близких к опыту связей. Здесь позиция Григоряна совпадает с позицией Клайна. Как и у Клайна, мы видим у него стремление привязать внутренние математические определения к некоторому более конкретному и реальному уровню представлений и из факта такого рода генетической преемственности извлечь аргумент в пользу приложимости абстрактной математики к опыту. Как и Клайн, он приходит к выводу, что идеально чистая математика, математика как система чисто формальных обобщений, если бы таковая и существовала, была бы, скорее всего, бесполезной для приложения даже в рамках самой математики [11. С. 134].

6. Марк Штейнер в своей статье «Приложения и приложимость» разделяет все приложения математики к физике на канонические и неканонические. Канонические приложения – это те, при которых математика продиктована физическим содержанием и математические понятия соединены с

содержательными представлениями. Примером канонического приложения является приложение понятия производной и дифференциала к описанию механического движения. Неканонические приложения – это те, при которых математический аппарат привносится извне, то есть из чистой математики. В этом случае математический аппарат уже не связан генетически с содержанием предмета и не несет в себе органической близости к этому предмету. Проблема Вигнера относится, очевидно, к неканоническим приложениям математики. Штейнер считает, что случаи неканонического применения математики всегда обусловлены многими частными факторами, и нет единого принципа, который позволил бы объяснить все случаи такого приложения. «Проблема Вигнера, – пишет Штейнер, – это не одна проблема: каждый беспричинный успех использования математики при описании некоторого физического явления – это отдельная проблема» [12. P. 26]. Позиция Штейнера, таким образом, близка к скептицизму Вигнера. Каждый случай беспричинного успеха математики в физике, по Штейнеру, может быть объяснен, но не существует универсальных принципов, объясняющих это явление в целом.

Р. Херш в цитированной выше статье высказывает две гипотезы о возможных основаниях эффективности абстрактной математики. По его мнению, существует два основных типа применения математики. Примером первого типа является применение арифметики. Мы можем объяснить это применение реалистически или натуралистически. Мы можем предположить, что во всех явлениях мира существуют некоторые связи, которые моделируются операциями арифметики, что и объясняет эффективность арифметики. Примером второго типа является применение к описанию различного рода явлений понятия круга. Никакого круга в природе нет, это только конструкция человеческого разума. Приложимость этого понятия к миру, говорит Херш, объясняется не тем, что круг соответствует чему-то в реальности, а тем, что круг, будучи интеллектуальной фикцией, может, тем не менее, играть роль средства классификации явлений. Идея Херша состоит в том, что мы не должны искать в образах абстрактной математики какого-то онтологического родства с физическими представлениями. Эти образы выступают средством классификации и описания просто потому, что они представляют собой достаточно полную и непротиворечивую систему понятий: мы не приспосабливаем математику к физическим объектам, а пользуемся математикой, чтобы подвести под нее факты опыта. Здесь Херш близок к установке Пуанкаре, согласно которой человеческий опыт достаточно податлив и его можно описать в любой геометрии, изменяя соответствующим образом правила интерпретации геометрических терминов. В этом смысле никакого таинственного предвосхищения физики математикой не происходит: любую математику, которая имеется на данный момент в наших руках, мы имеем возможность применить к физике. Проблема Вигнера, при таком подходе, является в определенной степени псевдопроблемой, проистекающей из нашей недооценки творческой способности нашего интеллекта к классификации явлений на основе произвольных конструкций разума.

3. Критика предложенных объяснений

Мы указали здесь лишь на часть подходов к объяснению феномена математического предвосхищения из довольно значительного их числа, но в принципе они уже выявляют основные идеи, лежащие в основе этих подходов. Это натуралистическая идея, привязывающая к природе сам процесс математического мышления, идея неизбежной эмпирической нагруженности внутренних определений математики и идея свободного формирования внутренних образов математики, благодаря которой они могут обгонять во времени близкие к ним физические образы.

Анализ показывает, что ни одно из этих объяснений не может быть принято в качестве удовлетворительного. Натуралистическое объяснение страдает неустранимой мистичностью и абстрактностью одновременно. Сама идея о подобии механизма синтеза нового в природе и в мышлении имеет некоторые основания, но она не может рассматриваться в качестве принципа, объясняющего структуру понятийных систем. Математика в своем внутреннем развитии, отталкиваясь от реальных форм, радикально уходит за их пределы. Природа не может сконструировать чего-то такого, что бы соответствовало понятию множества, обладающего мощностью большей, чем мощность континуума. Представляется, что конструирование в природе и конструирование в мышлении, вопреки мнению Ламуша, не протекают параллельно, и у нас нет оснований считать, что тяготение абстрактной математики к реализации в эмпирически значимых структурах можно вывести из понимания разума как структуры, подчиненной ритму Вселенной.

Установка Вигнера на то, чтобы принять явление математического предвосхищения в качестве некоторого фундаментального и далее не разъясняемого факта, также, конечно, не может быть принята. Предустановленная гармония, о которой говорил Лейбниц, устанавливается Богом, и она, конечно, должна быть принята как далее не разъясняемый факт. Но соответствие, фиксируемое в опыте между двумя конкретными сущностями, и по теории Лейбница не может быть оставлено без выявления его достаточного основания. В общей философской онтологии мы иногда принимаем некоторые далее не разъясняемые принципы. Когда мы говорим, к примеру, что все вещи находятся в движении, то, конечно, не ставим задачу вывести это утверждение из какого-то общего принципа. Но важно понять, что эмпирический закон эпистемологии, о котором говорит Вигнер, относится не к теологии и не к общей метафизике, а к теории познания, которая не допускает такого рода предельных и далее не разъясняемых аксиом. Несомненно, наличествуют механизмы, стоящие за этим феноменом, которые должны быть выявлены.

Идея М. Клайна состоит в своей сути в том, что подлинно чистой математики не существует и что феномен математического предвосхищения в значительной степени мистифицирован сторонниками абсолютно чистой математики. Речь, по Клайну, может идти лишь о том, что математическая теория, имея одну содержательную интерпретацию, может впоследствии получить другую. Это рассуждение Клайна, как представляется, ошибочно в двух моментах. Во-первых, попытка найти за всяким математическим определением эмпирическую предпосылку, не выглядит оправданной. Чистые внеэмпирические образы математики, несомненно, существуют: мнимые числа, к примеру, были введены чисто из операциональных соображений и не были подготовлены какими-либо фактами опыта. Во-вторых, даже если допустить, что Клайн прав в этом первом положении, то все-таки возникает вопрос, почему математические образы, имея одну эмпирическую интерпретацию, затем получают другую, причем в некоторой иной сфере опыта. Это, по сути, та же самая проблема непостижимой эффективности, о которой говорит Вигнер. Своей первой эмпирической предпосылкой Клайн лишь сокращает количество случаев, нуждающихся в объяснении, но не устраняет их полностью.

Попытка Вл.П. Визгина объяснить явление математического предвосхищения на основе представления о посредствующих двояко-семантических структурах представляется недостаточной в том отношении, что она существенно ограничивает сферу этого явления. То, что аналитическая механика выступает посредствующим звеном между абстрактными структурами математики и физикой, не может быть оспорено. Но явление математического предвосхищения значительно шире: опыт показывает, что оно имеет отношение к любому типу математических теорий, а не только к теориям, связанным с аналитической механикой. Структуры многозначной логики находят интерпретацию в теории релейно-контактных цепей; трехмерная аффинная геометрия находит интерпретацию в теории цветов; связи между простыми числами, открытые еще в XVIII в., в последние десятилетия нашли неожиданное применение в теории кодирования. Никакой посредствующей двояко-семантической структуры в этих случаях мы не наблюдаем.

В концепции Григоряна есть момент, который, как представляется, проливает некоторый свет на истинные истоки явления. Этот момент заключен в понимании относительной свободы математических объектов, из которой проистекает способность внутренней математики обгонять соответствующие содержательные структуры. Но этот момент не проведен автором последовательно и в конечном итоге он, как и Клайн, выводит возможность математического предвосхищения из связи объектов внутренней математики с некоторыми близкими к опыту опорными понятиями, то есть – в итоге с некоторым содержательным контекстом. Из его теории, как и из теории Клайна, вытекает, что подлинно чистая математика, если бы такая существовала, не имела бы никакого предвосхищающего значения. Представляется, что это положение не соответствует фактам. Мнимые числа в тех операциях, которые были установлены для них Р. Бомбелли, имели логическое оправдание, но не имели никакого содержательного или интуитивного оправдания.

Трудно принять также и положение Штейнера, согласно которому каждый случай немотивированной эффективности математики нуждается в особом объяснении. Несостоятельность такого рода дробления проблемы следует из общей логики научного объяснения. Разумеется, частные проявления эффективности математики могут иметь свою специфику. Штейнер убежден в том, что применение теории групп в физике элементарных частиц имеет принципиально другое оправдание, чем применение неевклидовых геометрий в теории относительности. Вполне возможно, что он здесь прав. Но частная специфика не уничтожает родового единства всех этих случаев и возможности их единого объяснения на уровне их родовой общности. Поскольку мы ставим проблему в ее общих признаках, то она должна иметь общее решение, значимое для всех случаев, охватываемых родовым понятием.

Характеристика Р. Хершем математических понятий как мыслительных форм, имеющих отношение к любому опыту, фактически снимает проблему математического предвосхищения, ибо психологически удивляющее нас совпадение математических форм с эмпирическими ситуациями гарантировано при таком подходе тем обстоятельством, что математические формы обладают неограниченными возможностями подтягивать под себя любое эмпирическое содержание. Представляется, однако, что такая трактовка применения математики к физике существенно искажает этот процесс. Математическое предвосхищение есть все-таки соответствие равных сторон, а не слияние математики и физики при абсолютном примате математических образов. Если общая теория относительности требует в качестве своего аппарата тензорного исчисления, то его вряд ли можно заменить формулами классического математического анализа. Система фиктивных математических образов может стать средством классификации эмпирического материала, если отсутствует структурное тождество между этими системами образов. Математический анализ стал аппаратом механики вследствие того, что отношение между функцией, ее производной и ее второй производной обнаруживало структурную тождественность с отношением пути к скорости и ускорению. Проблема математического предвосхищения не может быть объяснена только из факта подтягивания опытных представлений к произвольной математической структуре: суть проблемы как раз и состоит в необходимости объяснить неожиданно появляющиеся структурные тождества между математическими и физическими системами представлений.

Вл.П. Визгин, безусловно, прав в том, что тайна непостижимой эффективности математики может быть раскрыта только через анализ исторического взаимодействия математики и физики, представляющего собой «игру между мышлением и опытом». Основной вопрос, однако, состоит в том, в каких моментах должна быть раскрыта эта «игра», какие понятия должны быть введены для того, чтобы неясные для нас аспекты эффективности математики получили действительное объяснение. Представляется, что такой системы понятий, достаточной для объяснения этого явления у нас пока нет.

Мы перейдем теперь к анализу гипотезы совершенно другого типа. Представляется, что философия математики при решении проблемы эффективности математики должна оставить чисто логическую и гносеологическую плоскость рассуждения и войти в соприкосновение с теориями, рассматривающими общую логику приспособления живого существа к окружающей его среде. Все говорит о том, что мы должны использовать здесь возможности, открываемые перед нами идеями эволюционной эпистемологии.

4. Опережающее развитие искусственных систем

Тезис Лейбница о предустановленной гармонии, царящей в мире и согласующей все его части в едином потоке совершенствования, обладает привлекательностью для философского ума, но он слишком абстрактен для того, чтобы быть базой объяснения методологических закономерностей. Мы будем здесь исходить из более конкретной и более осязаемой предпосылки, а именно из анализа искусственных систем как систем, продуцируемых жизнью человеческого общества.

Общество в процессе своей жизнедеятельности создает специфические развивающиеся системы, соответствующие основным направлениям его активности. К таким системам относятся язык, наука, техника, искусство, система образования и т.д. Эти системы являются искусственными в том смысле, что они появляются и развиваются только в социуме как результат деятельности людей и в качестве материальной организации той или другой стороны социальной деятельности.

Хотя искусственные системы создаются и совершенствуются людьми, они могут рассматриваться независимо от человека, как автономные саморазвивающиеся и внутренне детерминированные системы, в которых появление одних феноменов необходимо приводит к появлению других и в которых имеются объективные законы развития, независимые от личностей, стоящих за ними. Мы можем говорить, что математика постоянных величин необходимо порождает математику переменных величин и что переход от одной математики к другой совершился бы и в том случае, если бы по каким-то причинам не появились бы такие учёные, как Декарт, Ньютон и Лейбниц. Наша задача здесь состоит в том, чтобы понять внутреннюю логику развития искусственных систем, бросающую свет на развитие математики как одной из искусственных систем.

Здесь естественно принять то положение, что развитие искусственных систем отражает законы приспособительной активности человека и социума в целом в условиях неопределенности будущего. Такая постановка вопроса неизбежно ведет нас к анализу приспособительной деятельности живых существ, то есть к необходимости прояснения проблем, относящихся к общей теории биологической активности.

Целостная теория биологической активности была создана в 1960-х гг. нашим выдающимся физиологом Николаем Александровичем Бернштейном. Основные выводы этой теории, важные для подхода к решению поставленной здесь задачи, можно свести к следующим трем положениям:

1. «Процесс жизни не есть уравновешение с окружающей средой, как это понимали мыслители классического механицизма, а преодоление этой среды, направленное при этом не на сохранение статуса или гомеостазиса, а на движение в направлении родовой программы развития и самообеспечения» [13. С. 27].

2. Процесс жизни организуется закодированной в мозгу «моделью потребного будущего». «Задача действия, результат, которого организм стремится достигнуть, есть нечто такое, что должно стать, но чего еще нет. Таким образом, задача действия (закодированная так или иначе в мозгу) представляет собой отображение или *модель потребного будущего*; очевидно, что жизненно-полезное или значимое действие не может быть ни запрограммировано, ни осуществлено, если мозг не создал направляющей предпосылки в виде модели потребного будущего» [13. С. 18].

3. Необходимо разделять действия по их зависимости от раздражителя и по их жизненной значимости. «Существует различие действий по признаку зависимости их от пускового раздражителя. Мы видим здесь градацию от действий, полностью детерминированных раздражителем (рефлексы врожденные и условные), до действий, вообще не нуждающихся в пусковом раздражителе. Эти последние действия можно назвать *произвольными* или спонтанными. Но эта градация не имеет ничего общего с градацией по жизненной значимости совершаемых действий, и как раз немалое количество наиболее значимых действий найдутся на фланге “спонтанных” актов без спусковых стимулов» [13. С. 18].

Живое существо, по Бернштейну, решает свои задачи в высокой степени неопределенных условиях. «Позволяя себе метафору, можно сказать, – пишет он, – что организм все время ведет “игру” с окружающей его природой, – игру, правила которой не определены, ходы, «задуманные» противником, неизвестны» [13. С. 22]. Удивительный факт состоит в том, что при всех этих неопределенностях живые существа все-таки решают свою задачу, то есть в ситуации полной неопределенности относительно возможного будущего им удается построить достаточно эффективные стратегии поведения.

Мы исходим из того, что развитие искусственных систем отражает логику развития живых систем, и сами искусственные системы могут рассматриваться в качестве живых систем, нацеленных на неопределенное будущее. Каждая искусственная система имеет актуальную задачу в том смысле, что в любой данный момент она развивается в интенции на решение проблем, неотложных для данного времени, и на приготовление к неопределенному будущему. Искусственная система детерминирована в том смысле, что она обязана реагировать на актуальные задачи и она автономна в том смысле, что она совершенствует себя в направлениях, которые нельзя вывести из актуальных задач. Это автономное или свободное развитие, развитие без внешних стимулов, является в высшей степени значимым для устойчивости и перспективности системы.

Проблема, которая должна нас здесь интересовать, состоит в прояснении того, чем обусловлено свободное развитие искусственной системы, как система осуществляет выбор внутренних изменений, которые не предопределены актуальными задачами. Анализ развития биологических систем и деятельности сознания подсказывает нам ответ, который приложим ко всем искусственным системам. Мы имеем основание утверждать, что свободное (не детерминированное актуальными задачами) развитие искусственной системы обусловлено моделью потребного будущего и его основная задача состоит в возможно более адекватном предварении потребностей будущего в условиях его неопределенности. Теория Н.А. Берштейна подсказывает нам, что это развитие обусловлено моделью потребного будущего и направлено на предвосхищение будущих требований к системе.

Речь идет здесь о живом организме вообще и, следовательно, о бессознательном предвосхищении будущего. Человек как мыслящее существо имеет рациональное видение будущего. Он может, опираясь на свои знания, высказывать мнения о вероятном будущем и обосновывать стратегии поведения на такого рода рациональной основе. Но мы должны иметь в виду, что и в человеческом обществе большая часть нашей подготовки к будущему происходит на подсознательном уровне, на уровне свободного и нерефлектируемого выбора тех или иных действий. Модель потребного будущего направляет наше поведение, не детерминированное актуальными задачами, на предварение будущего. В обыденной жизни мы, конечно, не осознаем ни нашего потребного будущего, ни наших действий как соответствующих или не соответствующих ему. Но наше совокупное социальное поведение обусловлено моделью потребного будущего.

Мысль о неосознанном предварении будущего в действиях отдельного человека и человечества в целом не нова. Г. Спенсер, рассматривая чувства рационально необъяснимой симпатии и антипатии, возникающие в отношениях между людьми, объяснял эти, на первый взгляд, ничем не обусловленные эмоции неосознанным предварением будущего. Имеются, считал он, тонкие признаки, улавливаемые на уровне подсознания в жестах и поведении других людей, которые сигнализируют нам либо об опасности общения с этими людьми, либо, напротив, о полезности их в смысле нашей безопасности. Наши эмоции, по Спенсеру, говорят нам о будущем, они предвосхищают возможные варианты будущего, они информируют нас о том, что заведомо не может сформулировать и выразить наш язык: эмоции готовят нас к будущему, которое мы не осознаем.

Идея Бернштейна о модели потребного будущего, как неосознанного представления о будущем, вырабатываемого сознанием, конкретизирует эти догадки старой эволюционной теории. Анализ оснований нашего поведения позволяет утверждать, что вся эмоциональная и мыслительная сторона человеческой личности сориентирована на будущее в том смысле, что какую бы актуальную задачу личность не решала, она решает эту задачу таким образом, чтобы наилучшим образом подготовиться к неопределенному будущему. «Предварение» будущего, согласно Бернштейну, не всегда осознаваемая, но совершенно необходимая часть нашего мышления и поведения. Там, где человеческая деятельность жестко не детерминирована настоящим, она детерминирована будущим и направлена на его предварение.

Для понимания логики развития таких сфер социальной жизни, как искусство и наука, мы должны сделать еще один шаг в понимании предваряющей активности сознания и перейти от личностного предварения на уровне эмоций к социальному предварению на уровне социального инстинкта, определяющего свободный выбор в общезначимых областях деятельности. В данном случае мы можем говорить о наличии некоторого рода неявных, но достаточно влиятельных критериев отбора, не принадлежащих никому, и, тем не менее, определяющих реальный отбор в сфере искусства, научных гипотез, идеологий и мировоззренческих установок. Наш выбор в этих сферах никогда не может быть оправдан рационально, ибо в своей глубине он определен не рациональными аргументами, а социальным инстинктом, не поддающимся рационализации.

Логика иррационального жизненного приспособления отражается в логике развития искусственных систем. Мы вправе говорить о предвосхищающей активности всех искусственных систем как об их фундаментальной особенности. Каждая искусственная система, поскольку она формируется под влиянием модели потребного будущего, несет в себе потенциал предварения будущего. В каждой из этих систем мы можем найти элементы новизны, не вытекающие из актуальных задач, которые, тем не менее, становятся понятными с точки зрения будущего, то есть при их ретроспективном рассмотрении.

5. Системное обоснование математического предвосхищения

Достаточно очевидно, что механизмы неявного отбора, направленного на будущее, работают и в науке. А. Пуанкаре писал, что в математике можно поставить тысячи задач, но если мы посмотрим, чем фактически занимаются современные математики, то увидим, что в сфере их внимания не более сотни из этих проблем. Здесь мы имеем дело с некоторым жестким отбором, который не может быть объяснен ни практической полезностью, ни какими-либо иными доводами. Он вообще не может быть объяснен из каких-либо реалий сегодняшнего дня. Мы можем говорить здесь о социальной интуиции будущего, которая существует в сознании научного сообщества и определяет выбор проблем и объектов, заслуживающих разработки.

Мы будем исходить здесь из того, что предвосхищающее развитие математики представляет в своей сущности одно из проявлений неосознанного опережающего развития искусственных систем. Это значит, что мы имеем здесь дело не со случайными совпадениями некоторых физических объектов с их математическими образами, как бы заготовленными заранее, а с тенденцией к такому совпадению, которая реализуется через систему неявных критериев, производных от «модели потребного будущего». Мы имеем здесь дело с проявлением свободного развития математики, детерминированного вероятными запросами будущего.

Некоторая трудность в объяснении конкретных форм математического предвосхищения состоит в выявлении общих целей математики как искусственной системы. Ясно, что искусственные системы как таковые не могут быть поставлены на одну доску, то есть рассмотрены в плане общей цели. Математика, язык, техника и искусство обусловлены своими задачами, и эти задачи должны быть выявлены для каждой искусственной системы отдельно. Для понимания опережающего развития математики, как ее необходимой внутренней тенденции, мы должны исходить из специфических целей математики как искусственной системы. Логика методологического объяснения требует здесь принятия некоторой конвенции, фиксирующей цели развития математического знания. Эта конвенция может показать свою адекватность в процессе объяснения, но в принципе она может быть и отвергнута, как не оправдавшая себя. К. Поппер прав, что методологическое мышление существенно основано на конвенциях, которые оправдывают себя лишь своей продуктивностью.

В качестве такого рода конвенции мы примем положение о том, что универсальная цель развития математического знания, как специфической искусственной системы, состоит в максимальной математизации или формализации содержательных представлений о мире, то есть в максимальном внедрении математического метода в систему теоретического объяснения. Мы формулируем таким образом некоторую сущностную цель математики и предполагаем как зависящее от нее и реализующееся направление развития ее понятий. Такое понимание задач математики может быть подтверждено анализом роли математики в развитии научного знания и некоторыми другими соображениями, но мы имеем здесь дело, конечно, только с конвенцией, но никоим образом не с истиной, имеющей абсолютное обоснование.

В предвосхищающем развитии математики, как уже сказано выше, можно выделить три рода явлений. Явления первого типа состоят в неожиданном расширении сферы значимости некоторых понятий. Е. Вигнер в своей статье приводит разговор двух приятелей: один из них, будучи статистиком, использует число π в расчетах роста народонаселения, другой задает ему «наивный» вопрос: «Какое отношение имеет численность народонаселения к длине окружности?» Действительно, это совершенно различные области, и математик древности, вычисляя отношение длины окружности к диаметру, не мог, конечно, и мечтать о таком широком применении константы π, которое имеет место в современной науке. Мы здесь также можем задать вопрос о том, почему алгебра Буля, созданная для систематизации форм логического мышления, нашла приложение в электротехнике; почему аффинная геометрия может быть интерпретирована как пространство цветов и стать математической основой цветоведения, почему одни и те же дифференциальные уравнения могут быть использованы как для исследования колебаний струны, так и для описания связи видов в биоценозе и т.д. Подобные вопросы можно множить до бесконечности. Почему понятия математики, изобретенные для решения конкретной задачи, начинают использоваться в других задачах и даже за пределами математики?

Для ответа на этот вопрос мы должны уяснить общесистемные корни этого явления. Легко видеть, что полифункциональность объекта, созданного первоначально для определенных конкретных целей, не является специфической для математики. Можно спросить также, почему наш обычный язык оказывается применимым для описания доселе ненаблюдаемых явлений или почему техническую деталь, созданную для какого-либо одного типа механизмов, можно использовать при конструировании совершенно другого типа механизмов, в другой сфере техники. Даже колесо первоначально было изобретено как средство передвижения, и никто не мог и предугадать столь универсального его использования в технике будущего. Аналогия с числом π здесь очевидна.

Размышляя об универсальности математических образов, об их полисемантичности и полифункциональности, мы затрагиваем, таким образом, общесистемную закономерность: во всех этих случаях элемент системы, созданной в конкретной ситуации и для определенной цели, оказывается затем более универсальным, пригодным для других целей, предвосхищающих другие требования. Это значит, что рассматриваемое явление не специфически математическое и должно быть объяснено из особенностей функционирования искусственных систем вообще, которые создаются обществом. Для того чтобы правильно понять суть предвосхищающего развития математики, мы должны отвлечься от математики и посмотреть на логику развития искусственных систем в целом.

Представляется, что полифункциональность в этом смысле может быть понята как некая стихийно реализующаяся экономия мышления. Решая конкретную техническую задачу, инженер выбирает между различными возможностями, которые он не всегда в состоянии оценить по их перспективности с точки зрения необходимости решения данной задачи. Здесь имеется некоторая свобода выбора, которая разрешается на уровне коллективного социального инстинкта, то есть на уровне внерационального представления о большей перспективности данного решения перед всеми другими. Мы вправе предположить в соответствии с теорией Н.А. Бернштейна, что этот выбор совершается неосознанно на основе модели «потребного будущего», то есть он совершается в поле действия социального инстинкта, который прикрывается представлениями об оригинальности, красоте, простоте, изяществе и т.п.

Эти соображения позволяют нам подойти и к пониманию предваряющей силы математики. Ясно, что мы не можем понять логики становления системы математических понятий без допущения внерационального компонента поведения, обусловленного наличием «модели потребного будущего», и без признания социального инстинкта, позволяющего осуществлять выбор в ситуациях, выходящих за сферу действия рациональных критериев. Неожиданная перспективность традиционных понятий в новых областях познания говорит о том, что уже первоначальное закрепление этих понятий в человеческом мышлении и в языке было продиктовано не только конкретной задачей, но и системой перспективного отбора, направленного на реализацию общей цели математического мышления. Перспективность математических понятий, проявляющаяся в их востребованности в различных областях человеческой деятельности, может быть объяснена, таким образом, через допущение внерационального перспективного отбора, заложенного в самом механизме формирования понятий. Свободное формирование математических понятий не обусловлено актуальными задачами, но оно находится в поле действия социального инстинкта, направленного на устойчивость и перспективность понятийной системы в целом.

Второе проявление эффективности математики, состоящее в тенденции к «офизичению» внутренних (не интерпретированных) образов, в своей основе также имеет системный характер, однако требует для своего объяснения привлечения дополнительных соображений логического порядка. Здесь мы можем принять идею Григоряна о процессе свободного конструирования новых структур в математике, обгоняющем процесс естественного обновления математического аппарата в физике. С этой точки зрения, математика имеет определенную независимость от содержательных представлений при введении новых образов. Если в математической теории появляется образ M_0, имеющий содержательную интерпретацию в $Ф_0$, то математик немедленно создает систему производных образов M_1, M_2 ,…, M_n, заполняющих логическую окрестность M_0. Если исходному образу M_0 соответствует система теоретических представлений $Ф_0$ и если $Ф_0$ в конечном итоге заменяется некоторой системой представлений $Ф_1$, являющейся обобщением $Ф_0$, то, в соответствии с принципом интерпретации, эта новая теория неизбежно потребует более общих или более абстрактных математических структур, чем M_0, находящихся, впрочем, в логическом родстве с M_0. Таким образом, уже элементарная логика связи математических и физических структур, которая характеризуется принципом соответствия и принципом интерпретации, предопределяет вероятность совпадения $Ф_1$ в плане математического аппарата с одной из форм M_1, M_2 ,…, M_n.

Однако эти соображения недостаточны в том отношении, что они пока не объясняют математического предвосхищения как необходимой тенденции, ибо они не могут гарантировать логическую полноту образов M_1, M_2 ,…, M_n и не могут заведомо исключить появления какой угодно длинной серии физических теорий $Ф_1$, $Ф_2$, …, $Ф_n$, каждая из которых в итоге потребует создания принципиально новой математической теории. Эта последняя возможность, однако, исключается, если мы будем рассматривать математическое знание как систему представлений, развивающихся под влиянием «модели потребного будущего», которое предпологает максимальную математизацию теоретических наук. Появление длинной серии физических теорий, требующих каждый раз создания новых математических абстракций и обобщений, означало бы предельную неэффективность и неустойчивость математического знания в целом. Идеальная устойчивость математики по отношению к физике недостижима, но мы имеем все основания считать, что механизмы отбора, регулирующие свободное развитие математики, направлены на ее обеспечение и, следовательно, на принятие и разработку тех форм, которые среди прочего наиболее перспективны для содержательной интерпретации в будущем.

Подводя итог, мы можем сказать, что математическое предвосхищение обусловлено логической связью математических и физических структур, а также отношением математики к физике как системы, приспосабливающейся (вторичной) и развивающейся под влиянием «модели потребного будущего». Последнее обстоятельство является решающим для понимания всего процесса. Само стремление математиков развивать абстрактные образы до всякого запроса со стороны физики и даже самой математики может быть объяснено только в плане инстинкта перспективного приспособления математики как системы к будущей системе содержательного знания. Формальная структура математики обеспечивает только принципиальную возможность опережающего развития математики. Тенденция к упреждению будущего, заложенная в механизме развития всех искусственных систем, гарантирует, что эта принципиальная возможность будет всегда реализованной.

Что касается поразительной экстраполябельности законов физики, выраженных в точной математической форме, то она требует существенно другого подхода к своему обоснованию. Определенная степень экстраполябельности научного закона вытекает, конечно, из логики его становления и из системной сущности знания. Но, поднимая этот вопрос, Вигнер говорит не об экстраполябельности вообще, а о поразительно высоком качестве этой экстраполябельности. Это замечательное качество законов физики не может быть обосновано только из системных соображений; мы должны здесь, по-видимому, привлечь некоторые соображения натурфилософского порядка, а именно принять старое утверждение о простоте и единообразии законов природы. Нетрудно видеть, что натурфилософский аргумент так или иначе присутствует и во всех наших предшествующих рассуждениях. Тенденция к динамической экономичности и перспективности есть необходимое явление в системе, возникающее из адаптивной активности общества.

Таким образом, реальный успех этой тенденции существенно зависит от разнообразия и сложности среды, в которой протекает эта активность. Мысленно усложняя среду, в которой живет общество, уменьшая устойчивость ее компонентов, мы придем к ситуации, в которой исчезнет всякая экстраполяция и всякое предвосхищение. Таким образом, ясно, что, если разнообразные формы эффективности математики вытекают из ее системного, динамического характера, то мера этой эффективности, то есть количественная степень соответствующих тенденций, прямо зависит от качества среды, от устойчивости реализующихся в ней тенденций. Это значит, что такого рода явления в целом не могут быть объяснены без определенного рода натурфилософских допущений. Практика показывает, что человек способен, находясь перед лицом бесконечного разнообразия фактов, угадывать конечные формы, которым подчиняется эта бесконечность. Гильберт указал 20 аксиом, которые необходимы и достаточны для вывода всех теорем евклидовой геометрии, и никто не сомневается в том, что эта аксиоматика не нуждается больше ни в каком принципиальном изменении. Как такого рода проницательность оказывается достижимой для конечного человеческого сознания? Ответить на этот вопрос не просто, но ясно, что мы, как и в предыдущих случаях, должны исходить из анализа внерациональных факторов формирования базовых понятий.

С изложенной точки зрения, мы видим главный недостаток рассмотренных выше подходов к обоснованию математического предвосхищения. Он состоит в попытке вывести перспективную значимость внутренних понятий математики из их генетической связи с первичным опытом, из их статуса как абстракции, идеализации или продукта структурирования. Радикальный взгляд сторонников такой точки зрения состоит в том, что понятия, не имеющие такой генетической связи, введенные в математическую теорию из чисто формальных соображений, вообще не могут получить содержательной интерпретации и приложения. Мы уже указывали, что это положение противоречит фактам. Мнимые числа, теория групп и многомерные геометрии не поддерживались никакими содержательными ассоциациями в процессе своего вхождения в математику, но именно эти структуры занимают главенствующее место в современной математизации физики. Таким образом, перспективность приложения абстрактных образов совершенно не зависит от такого рода генетических связей, ибо она обусловлена исключительно отношением этих образом к сфере свободного развития математических образов. В своей статье «Основы общего учения о многообразиях» (1872) Георг Кантор высказал знаменитое положение, состоящее в том, что сущность математики в ее свободе. Он хотел этим сказать, прежде всего, то, что введение новых понятий в математике не нуждается в аргументах внешнего или, как он говорил, «транзиентного» характера. Но, читая более внимательно, мы видим и другой, более глубокий смысл этого положения: Кантор утверждает, что именно свобода формирования внутренних объектов математики обеспечивает их имманентную и транзиентную истинность. «Если бы Гаусс, Коши, Абель, Якоби, Дирихле, Вейерштрасс Эрмит и Риман, – писал он, – были обязаны всегда подвергать свои новые идеи метафизическому контролю, то мы бы, право, не смогли наслаждаться грандиозной системой современной теории функций, которая хотя и была задумана и создана совершенно свободно, без всяких посторонних целей, уже и теперь в применениях к механике, астрономии и математической физике обнаруживает, как этого и следовало ожидать, свое транзиентное значение» [14. С. 80]. Кантор утверждает, что именно наличие имманентной свободы в формировании понятий математики позволяет нам ожидать их эффективности в смысле транзиентной значимости.

Вся изложенная здесь аргументация может быть понята как попытка рационального обоснования этого глубокого прозрения Кантора. Мы приходим к выводу, что объяснение приложимости абстрактной математики проистекает из того факта, что математическая теория является существенно автономной системой, которая в своих внутренних актах обновления подчинена критериям перспективности, продиктованным моделью потребного будущего. Мы видим, что все искусственные системы, порождаемые жизнью общества, способны не только отвечать на актуальные запросы, но в актах своего внутреннего совершенствования способны предвосхищать будущие запросы к себе, увеличивая тем самым свою устойчивость и функциональную перспективность. Эти системы имеют тенденцию к предварению будущего, которая реализуется в самых различных формах. Способность понятий к расширению сферы своего использования, способность чистых теорий к неожиданному соединению с содержательными представлениями, способность наших не вполне проверенных догадок приобретать статус фундаментальных принципов – это не мистика, а проявление свободного развития понятийных систем, обусловленного неосознанными требованиями будущего, которые определяют как формирование наших эмоций, так и формирование наших понятий.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Клейн Ф.* О геометрических основаниях лоренцовой группы // Новые идеи в математике. – Санкт-Петербург, 1914. – № 5. – Вып. 5. – С. 144–174.
2. *Гильберт Д.* Избранные труды. – Т. 1. – М.: Факториал, 1998. – 575 с.
3. *Эйнштейн А.* Собрание научных трудов. – Т. 4. – М.: Наука, 1967. – 600 с.
4. *Дьедонне Ж.* О прогрессе математики // Историко-математические исследования. Вып. XXI. – М.: Наука, 1976. – 356 с.
5. *Вигнер Е.* Непостижимая эффективность математики в естественных науках // Вигнер Е. Этюды о симметрии. – М.: Мир, 1971. С. 182–198.
6. *Hersh R.* Inner Vision, Outer Truth // Unconvenntional Essays on the Nature of Mathematics. – P. 320–338.
7. *Lamouche A.* L' homme dans L'harmonie universelle. – Paris, 1958.
8. *Клайн М.* Математика: утрата определенности. – М., 1984.
9. *Визгин Вл.П.* Проблемы взаимосвязи математики и физики // Историко-математические исследования. – Вып. XX. – 1975.
10. *Визгин Вл.П.* Непостижимая эффективность аналитической механики в физике // Метафизика. Век XXI / под ред. Ю.С. Владимирова. – М.: БИНОМ, 2011. – С. 275–290.
11. *Григорян А.А.* Размышления о постижимости эффективного применения математики // Математика и реальность: труды Московского семинара по философии математики / под ред. В.А. Бажанова, А.Н. Кричевца, В.А. Шапошникова. – М., 2014. – С. 121–141.

12. *Steiner V.* Mathematics – Application and Applicability // The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic / Shapiro S. (ed.). – New York: Oxford University Press, 2005. – P. 625–650.
13. *Бернштейн Н.А.* Новые линии развития в физиологии и их соотношение с кибернетикой. – М., 1962.
14. *Кантор Г.* Труды по теории множеств / отв. ред. А.Н. Колмогоров, А.П. Юшкевич. – М.: Наука, 1985.

PREDEFINED HARMONY IN THE INTERACTION BETWEEN MATHEMATICS AND PHYSICS

V.Ya. Perminov

The article examines questions related to the explanation of the efficiency of the practical use of the results of mathematics. An approach is proposed to the explanation of this phenomenon based on A.N. Bernshtein's theory of adaptation of living organisms to the environment on the basis of the model of a necessary future.

Key words: mathematical abstraction, mathematical anticipation, artificial system, model of a "necessary future," intuition, social instinct, unconscious selection criteria.

МЕТАФИЗИКА ИНФОРМАЦИОННОЙ РЕАЛЬНОСТИ

В.А. Яковлев

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Обосновывается новый информационно-теоретический подход к проблеме бытия. Выдвигается положение, что синонимом единой объективной реальности становится информационная реальность (бытие информации), данная субъекту в ощущениях, показаниях приборов и вычислениях.

Ключевые слова: информация, бытие, реальность, сознание, математика, феноменология, творчество, синергетика, физика.

Постепенно происходит категоризация сравнительно недавно появившегося понятия «информация» (лат. «informatio»). Из обыденного понимания информации как получения, хранения и передачи различного рода сведений в ходе человеческого общения данное понятие уже приобрело статус межнаучного, активно используемого в космологии, биологии, химии и квантовой физике. При исследованиях синергетических процессов в понятии информации выявляется телеологический (энтелехиальный) аспект.

Информационный подход в настоящее время широко применяется во многих естественных и гуманитарных науках. Особо важную роль понятие информации играет в комплексе когнитивных дисциплин – нейрологии, когнитивной психологии, когнитивной социологии, теориях искусственного интеллекта и др.

Понятие информационного общества интенсивно используется в социальных исследованиях и программных документах различных политических партий. Периодически проводятся международные симпозиумы и конференции по теоретическим и практическим аспектам новой науки – информатики. По содержательности и глубине обсуждаемых проблем отметим одну из последних – Towards a New Science of Information: 4th Conference (International) on the Foundations of Information Science (FIS 2010). – Beijing, China, 2010. В США «Информатика» как самостоятельная дисциплина в западных странах рассматривается сегодня в четырёх аспектах – Computer science, Information science, Computational science и Social Information science.

Однако заметим, что в новой философской энциклопедии нет философского понятия информации. Правда, есть статья «Информации теория», которая раскрывается в качестве специальной научной дисциплины, обычно представляемой как раздел кибернетики. В последней, как известно, анализируются математические аспекты процессов сбора, передачи, обработки и хранения информации.

По мнению многих членов мирового научного сообщества, ещё далеко не сложилось какое-либо устойчивое, более-менее принятое понимание содержания и значения понятия информации.

Однако в современных работах по философии науки в последнее время наблюдается всё более усиливающийся интерес к онтологическому и методологическому статусу понятия информации [1; 2].

Понятие информации используется даже при анализе классической философской литературы. Так, анализируя философию Гегеля, А.В. Иванов и В.В. Миронов пишут: «Если не обращать внимания на отчетливо проступающий у Гегеля дух панлогизма и идеалистического преформизма, то нельзя не согласиться с великим германским мыслителем в том, что вся *природа оказывается пронизанной идеальными или, как бы мы сказали сегодня, информационными процессами и связями*» [3. С. 614–615].

В прошлом веке, начиная с «пионерских» работ А.Д. Урсула, сложились и до сих пор существуют две основные концепции информации. Это так называемая атрибутивная концепция информации, в которой наличие информации, как считается, присуще всем физическим процессам и системам. (А.Д. Урсул, И.Б. Новик, Л.Б. Баженов, Л.А. Петрушенко и др.). В последнее время новые аргументы в пользу атрибутивной теории были представлены со стороны синергетики.

Вторая оппозиционная концепция – функциональная – рассматривала информацию лишь как свойство самоорганизующихся сложных (П.В. Копнин, А.М. Коршунов, В.С. Тюхтин, Б.С. Украинцев, Д.И. Дубровский и др.). Подчеркнём, что обе концепции признают принцип необходимой связи информации со своим носителем и принцип инвариантности информации по отношению к физическим свойствам своего носителя.

Разнообразные модельно-математизированные концепции информации (начиная с К. Шеннона) создают возможности для эффективного решения конкретных технических и организационных задач. Однако они не могут разрешить спор об онтологическом статусе информации между атрибутивной и функциональной теориями.

Широко известно также определение, данное Г. Кастлером, для понимания информации в системах любой природы как случайного запомненного выбора варианта из многих возможных и равноправных. В динамической теории информации, развиваемой Д.С. Чернавским, это определение используется в качестве фундаментального для решения задач, связанных с начальными процессами эволюции.

Однако сразу бросается в глаза антропоморфность характеристик данного определения, ведь даже биологические системы, не говоря уже о социальных, действуют довольно целенаправленно, а поэтому для них случайность есть некая противоположность их закономерному поведению. Кроме того, к этим характеристикам Д.С. Чернавский добавляет ещё так называемую ценностную компоненту информации, помогающую возникновению и выживанию самых простых живых организмов. Учёный считает, что ценность информации – понятие содержательное и даже необходимое для описания живой природы. Оно связано с важным свойством живой природы – способностью живых существ к целеполаганию [4].

В целом, по нашему мнению, ситуация, связанная с определением информации, во многом напоминает исследования конца XIX в., где использовалось понятие «энергия». Тогда тоже были различные его интерпретации на основе теорий «теплорода», флогистона и т.п. Лишь в работах известных учёных Р. Клаузиуса, У. Томсона, Дж.П. Джоуля и др. было сформулировано само физическое понятие «энергия» и выведены основные с ним связанные законы.

На наш взгляд, дискуссия об определении информации может быть переведена на другой уровень, если повысить статус понятия информации с общенаучного до философско-категориального.

Такое направление анализа особенно отчётливо прослеживается в последнее время в нашей стране и за рубежом. При данном подходе такие свойства информации, как разнообразие и различие (У.Р. Эшби) или неоднородность (В.М. Глушков) представляются атрибутами информации, поскольку в конечном счёте они с разных сторон выражают сущностную характеристику информации – её непрерывное движение, то есть процесс и изменение [5]. Таким образом понятие информации тесно «увязывается» с понятием реальности.

Ранее считалось общепринятым, что, например, в методологии физического познания используются три понятия реальности: «объективная реальность» (природа, физический мир), «эмпирическая (наблюдаемая или экспериментальная) реальность» и «теоретическая реальность» (мир конструктов, теорий и моделей). Выявление взаимосвязей и отношений между этими концептами признавалось одной из важнейших задач философии науки. Однако после работ физиков и философов, посвящённых роли наблюдателя (его сознания) в исследованиях природы квантовых систем, уже нередко говорят и об объективной реальности сознания [6–8].

К этому можно добавить представления о космологической реальности, или информационном поле Мультиверса, опирающиеся на так называемый «антропный принцип». «Введение представления об информационном поле Вселенной, – резонно считает В.А. Кушелев, – означает признание онтологического статуса за информацией и правомерность философского анализа этой реальности наряду с такими формами материи, как энергия и вещество, которые являются предметом исследования науки» [9. С. 75].

Наиболее адекватным языком, выражающим структуры информационного бытия (поля), является математика. Ещё А. Эйнштейн в так называемой Спенсеровской лекции «О методе теоретической физики», прочитанной им в Оксфорде 10 июня 1933 г., на основании своего опыта по конструированию физических теорий точно предсказал единственно адекватную и в то же время творческую роль математики в понимании и описании информационных структур природы.

Знаменитый учёный таким образом сформулировал свою концепцию: «Весь предшествующий опыт убеждает нас в том, что природа представляет собой реализацию простейших математически мыслимых элементов. Я убежден, что посредством чисто математических конструкций мы можем найти те понятия и закономерные связи между ними, которые дадут нам ключ к пониманию явлений природы. Опыт может подсказать нам соответствующие математические конструкции. Но настоящее творческое начало присуще именно математике» [10. С. 184].

Современный известный физик-теоретик А.П. Ефремов считает, что можно говорить об объективности математических структур и отношений, то есть о независимости математики от человека. Человек лишь открывает эти структуры, но не создаёт их. А.П. Ефремов пишет: «Человеческое сознание можно рассматривать как вид прибора для обработки информации: её получения, хранения передачи. Но, в отличие от технических устройств, человек способен также осмысливать полученную им информацию (реализовывать функцию понимания), а также создавать новую информацию» [11].

Однако если человеческие пять чувств получают из внешней среды «неоцифрованные» сигналы и поэтому как физические приборы оказываются очень неточными, то при математическом способе передачи, считает учёный, информация в принципе не искажается, если, конечно, не допускаются чисто математические ошибки. Сознание в таком случае, как своего рода антенна, настраивается на «прямой» приём и передачу информации.

Согласно гипотезе известного физика В.В. Налимова, параллельно и независимо от мира материи, существует семантическое пространство, т.е., можно сказать, ещё одна реальность. Механизм считывания смыслов этой реальности описывается, как считает В.В. Налимов, с помощью интеграла Байеса. Если в роли оператора смыслов выступает человек, то функцию процессора берёт на себя его мозг. Суть семантического пространства раскрывается через триаду *смысл – текст – язык*.

Известно также немало культурологических теорий, исследующих социокультурную реальность, где огромную роль играют различные коммуникативные (информационные) практики.

Но теперь, если заострить вопрос – что объединяет все эти виды реальности? – то разумно предположить изначальную фундаментальную реальность – информационную. Синонимом единой объективной реальности становится информационная реальность (бытие информации), данная субъекту в многообразии ощущений, показаниях приборов и вычислениях.

Информационная реальность (информационное бытие) – это современное «архэ» мироздания. Поэтому все существовавшие в истории философии представления об «архэ», «идеях», «пневме», «абсолютах», «мировом разуме», «креативных силах» и т.п. можно считать в определённой степени до-информационными подходами (в какой-то мере синонимами) к осознанию фундаментального значения категории «информация».

В качестве примера проанализируем в этом отношении концепцию одного из последних классиков философии – Э. Гуссерля.

Феноменологическая философия, как полагал Гуссерль, представляет собой развитие основных тенденций древнегреческой философии и главенствующего мотива философии Декарта. Действительно, Картезий утверждал: «Если кто-нибудь задаётся целью исследовать все истины, познание которых доступно человеческому разуму… то он, вероятно, поймёт… что ничто не может быть познано прежде самого интеллекта, а не наоборот» [12. С. 280].

Согласно Гуссерлю, бытие понимается как коррелят сознания, как то, что осмыслено сообразно со свойствами сознания: как воспринятое, ожидавшееся, образно представленное, сфантазированное, идентифицированное, взятое на веру, предположенное, оцененное и т.д.

Гуссерль актуален, поскольку в настоящее время проблематика философии сознания, бытия сознания, интенсивно разрабатываемая в самых различных направлениях, в конечном счёте отталкивается от его идей. Это подтвердилось и на прошедшей в 2014 г. Всероссийской конференции с международным участием «История феноменологической философии и современные феноменологические исследования» (Институт философии РАН, 11–12 ноября 2014 г.), где автор данной статьи выступил с докладом «Феноменология и физика».

С 1994 г. регулярно проводятся международные конференции, организуемые научным центром по изучению сознания в Туссане (США). Последняя посвящена формированию междисциплинарной науки о сознании (International Conference – Toward a Science of Consciousness 2014. Tucson. Arisona. Tucson Marriott University. USA – April 21-26).

В настоящее время сформировался триединый комплекс когнитивных наук – традиционно гуманитарных, логико-математических и естественно-технических.

Наиболее известная на сегодня программа, условно называемая аналитической, включает большую группу активно полемизирующих друг с другом авторов. Это – Х. Патнем (теория тождества физических состояний мозга и его ментальных явлений «qualia») и близкий ему по взглядам Д.М. Армстронг, считающий сознание фактически материальным.

Более осторожную позицию занимает Д. Дэвидсон, разработавший теорию множественных интерпретаций материальных событий в мозге.

Особое внимание привлекает теория Дэвида Чалмерса, который остро поставил отмеченную выше так называемую «трудную проблему сознания» – почему не все ментальные процессы идут в «темноте», а сопровождаются идеальными «квалиа».

Дж. Серл в истолковании сознания важнейшей считает его характеристику как *субъективной реальности,* поскольку в принципе неустранимо его описание от первого лица, или субъективная онтология.

В целом в настоящее время существуют также несколько конкретно-научных подходов к пониманию природы сознания. Обозначим и кратко охарактеризуем эти направления.

Первый – биологический – связан с бурно развивающимися исследованиями в области генетики. Полная расшифровка генома человека, по мысли многих биологов, не только приведёт в итоге к элиминации различного рода деменций, продлению биологического времени творческой активности, но и, возможно, обнаружит особенности генотипов наиболее выдающихся в плане креативности людей. Отсюда надежды на новое возрождение сильно скомпрометированной в свое время науки евгеники (А.А. Нейфах, В.П. Эфроимсон, Ш. Ауэрбах).

Второй подход – нейрофизиологический – ставит целью расшифровку (по аналогии с биологическим) нейродинамического кода и структуры мозга. Открытие функциональной асимметрии головного мозга и составление его атласа. Выявление электрических и химических цепей передачи импульсов в нейронной сети, использование методов компьютерной томографии создают возможность объективной фиксации моментов творческого «озарения» при решении испытуемыми нестандартных задач (Дж. Марголис, Т. Нагель, Д.И. Дубровский).

Третий подход связан с работами по искусственному интеллекту на базе идей Ф. Тьюринга. Составляются всё более совершенные компьютерные программы, что особенно заметно в области традиционно считающейся высокоинтеллектуальной игры в шахматы. Постоянно модифицируются и усложняются сами компьютерные блоки (разработка теории квантового компьютера).

Ещё одна программа, связанная с феноменологией сознания, – информационно-синергетическая, по моему мнению, наиболее перспективная, находится в стадии становления и в силу своей новизны вызывает острые дискуссии [13; 14].

Её специфической особенностью является то, что сознание рассматривается как объективная информационная реальность со своими определёнными причинно-следственными связями (так называемая информационная, или ментальная, причинность) и синергетическими атрибутами (нелинейность, нелокальность, спонтанность, бифуркационность, резонансность, аттрактивность и др.).

В разработке этого подхода определяющую роль играют физические дисциплины. Направление этим исследованиям было положено академиком В.Л. Гинзбургом, который в Нобелевской лекции специально отметил три «великих» проблемы физики, среди которых вопрос редукции живого к неживому, то есть вопрос о возможности объяснить происхождение жизни и мышления на основе одной физики [15].

Действительно, ряд учёных встал на путь редукционистской «натуралистской» программы [16], неоднократно критикуемой Гуссерлем. Ведь, согласно философу, чтобы прийти к чистому сознанию, все позитивные науки должны быть подвергнуты трансцендентальному эпохе, так же как и все их предметные сферы.

Однако другие естествоиспытатели, на наш взгляд, даже, возможно, не осознавая сами, довольно близко подошли к разработке основных идей его феноменологии.

Заметим, кстати, что сам Гуссерль как-то не обращал в своих основных работах на развернувшуюся в его время дискуссию между Н. Бором и А. Эйнштейном о роли наблюдателя и его сознания в исследованиях квантовых объектов. Дискуссия приобрела ещё более острый характер, когда в 1957 г. Х. Эверетт предложил так называемую многомировую интерпретацию квантовой механики.

Затем физиком М.Б. Менским была предложена расширенная концепция Эверетта (РКЭ), в которой «снимается» вопрос о редукции волновой функции, описанной Э. Шредингером. Здесь важно подчеркнуть, что, развивая гипотезу Эверетта о множественности миров, М.Б. Менский шел к пониманию ментальности не «снизу вверх», как это делают редукционисты, а «сверху вниз» – от «бытия сознания в целом». Фактически такой подход означает, на наш взгляд, признание «чистого, абсолютного, трансцендентального сознания» теории Гуссерля. Это – сознание, которое интенционально и свободно делает выбор среди множества возможных альтернативных миров.

Будучи физиком, М.Б. Менский полагал иллюзией представление о единственности выбранного сознанием мира, подобной иллюзии, что Солнце вращается вокруг Земли. Отсюда его заключение, что в квантовую теорию проникает сознание, а с ним и феномен жизни.

Но ведь и Гуссерль прямо пишет, что «коррелят нашего фактического опыта, именуемый *действительным миром, – это особый случай многообразных возможных миров,* а со своей стороны, все эти возможные миры и немиры – не что иное, *как корреляты сущностно возможных вариантов идеи "постигающее в опыте сознание",* с присущими ему всякий раз более или менее упорядоченными взаимосвязями опыта» [17. С. 4].

Согласно М.Б. Менскому, новая методология физики должна, во-первых, допускать эксперименты с индивидуальным сознанием или наблюдением над ним в качестве инструмента проверки теории, а во-вторых, учитывать возможное влияние априорных интуитивных установок на результаты наблюдений.

Гуссерль, в свою очередь, утверждает, что конституирующие (априорные) структуры и процедуры сознания формируют в конечном счёте такие целостные образования, как «природа» («коррелят сознания»), «мир», «сущее», «бытие». Оба учёных считают, что путь к «чистой субъективности», или к «абсолютному сознанию», предполагает и «сущностную интуицию», которая принципиально отличается от традиционных научных рациональных методов.

Новая попытка введения сознания в интерпретационную картину квантовой механики свидетельствует об интуитивном понимании физиками метафизической значимости фактора креативности сознания. *Идеальное начало* как бы связывает мега- и микрокосмос. Так называемый известный антропный принцип получает универсальное мировоззренческое значение.

В космологии с помощью понятия сознания абстрактного наблюдателя («чистое сознание в его абсолютном самобытии», говоря языком Гуссерля) объясняется «тонкая» настройка универсума на основе известных фундаментальных физических констант, делающих в принципе возможным появление жизни и сознания (Ст. Хоукинг, Б. Картер, И.Л. Розенталь, В.В. Казютинский).

Как пишут современные философы А.В. Иванов и В.В. Миронов, интуитивно постигаемое сознание во Вселенной «является носителем “духовного генетического кода”» [18. С. 471].

Об этом говорил и Гуссерль: «Но по самому существу своему, поскольку она направляется на последние начала, философия в своей научной работе принуждена двигаться в атмосфере прямой интуиции, и величайшим шагом, который должно сделать наше время, является признание того, что при философской в истинном смысле слова интуиции, при феноменологическом постижении сущности открывается бесконечное поле работы и такая наука, которая в состоянии получить массу точнейших и обладающих для всякой дальнейшей философии решительным значением познаний без всяких косвенно символизирующих и математизирующих методов, без аппарата умозаключений и доказательств [17. С. 33].

В то же время именно в логике и математике Гуссерль видит эталоны чистых сущностей сознания. Философ пишет: «В объективной истинности, то есть в объективно обоснованной правдоподобности удивительных теорий математики и естественных наук, не усомнится ни один разумный человек [17. С. 2].

С этим полностью согласен известный современный физик и математик Р. Пенроуз. Он считает, что математики в самых великих своих открытиях наталкиваются на «творения Бога», на истины, уже где-то существующие «там вовне» и не зависящие от их деятельности. «Я не скрываю, – пишет ученый, – что практически целиком отдаю предпочтение платонистской точке зрения, согласно которой математическая истина абсолютна и вечна, является внешней по отношению к любой теории и не базируется ни на каком “рукотворном” критерии; а математические объекты обладают свойством собственного вечного существования, не зависящего ни от человеческого общества, ни от конкретного физического объекта» [19. С. 124].

Наиболее убедительными примерами, по мнению Пенроуза, стали: 1) открытые в XVI в. Кардано комплексные числа; 2) открытие в конце XX в. Бенуа Мандельбротом (одним из главных разработчиков теории фракталов) сложного множества. «Множество Мандельброта – это не плод человеческого воображения, а открытие. Подобно горе Эверест, множество Мандельброта просто-напросто уже существовало “там вовне”!» [19. С. 107].

В отечественной литературе платонистская позиция наиболее отчетливо выражена в работах физика Ю.И. Кулакова, который считает, что и в математике, и в физике можно выделить некие сакральные структуры, причем сакральная физика рассматривается как часть сакральной математики, так называемой физической структуры. Дело в том, пишет Ю.И. Кулаков, что «наряду с макромиром и с невидимым микромиром существует не менее важный для нас, – еще один невидимый мир – Мир Высшей реальности. О необычной физике этого Мира и идет речь в Теории физических структур» [20. С. 135].

Однако здесь необходимо оговориться. Гуссерль, разделяя с Платоном убеждение в абсолютной истинности логико-математических структур, отнюдь не считал себя платонистом, поскольку не приписывал идеям чистого сознания онтологического статуса. Напротив, – осуществить феноменологическую редукцию, по Гуссерлю, значит применить специфические процедуры («эпохе»), чтобы «заключить в скобки» всё то, что не относится к анализу феноменов чистого сознания.

Философ пишет: «С самого начала само собой разумеется, что вместе с выключением природного мира со всеми его вещами, живыми существами, людьми из нашего поля суждений выключаются также и все индивидуальные предметности, конституирующиеся благодаря оценивающим и практическим функциям сознания – возможные культурные образования, произведения технических и изящных художеств, наук… эстетические и практические ценности любого вида. Равным образом, разумеется, и реалии такого рода, как государство, нравственность, право, религия» [21. С. 33–34].

Заметим, что в таком варианте «чистое сознание» очень напоминает «семантический вакуум», «торсионные поля» – выражения, которые используют некоторые физики (В.В. Налимов, Л.В. Лесков, А.Е. Акимов, Г.И. Шипов) в качестве коррелята, или референта, информационного поля Универсума.

С нашей точки зрения, важно подчеркнуть, что исходными принципами для такого хода мысли учёного являются: 1) представление об исходной фундаментальной реальности как информационном поле (заменившим гуссерлевское «чистое сознание»), существующим и развивающимся по определённым программам; 2) представление об эмпирическом сознании индивида как высшем и необходимом этапе эволюции жизни, реализующей таким образом через математические структуры возможность прямой коммуникации с «чистым сознанием» (информационным полем) Универсума.

На наш взгляд, синтез физики и феноменологии возможен при подходе к индивидуальному (эмпирическому) сознанию как определённому срезу (уровню, слою) информационной реальности «чистого сознания».

Информационно существуют отдельные когнитивные события, традиционно представляемые, можно сказать, в виде модулей сознания индивида – мышления, чувственности, памяти, воли. Эти события имеют корреляционные связи с физическими полями, нейронами и всей клеточной структурой организма, социумом, а если учитывать физический принцип Маха, то и с Вселенной в целом, а значит, и с её информационным полем («чистыми данными абсолютного сознания»). Каждое индивидуальное ментальное событие как уникальный субъективный опыт есть информационно-синергетическая сингулярность, которая «конденсируется» («компактируется») в речи.

Используя язык феноменологии, можно предположить, что через «говорение» и «писание» – своеобразные «приборные ситуации» – происходит редукция (коллапсирование») ментального события к его конкретной материальной фиксации (аналогия с измерительными процедурами в квантовой механике). Индивидуальное сознание выступает как фрактал (коррелят) чистого абсолютного сознания (информационного поля).

Первым, как известно, проблему использования вычислений в философии поставили испанский средневековый богослов и логик Р. Луллий, развивавший так называемую комбинаторику как «великое искусство открытия». В XVII в. этой же идеей был вдохновлён Г.В. Лейбниц, который разрабатывал принципы универсальной вычислительной науки как способа решения всех проблем человечества с целью его благополучия.

Современный выдающийся американский физик-теоретик Дж.А. Уилер в 1990 г. выдвинул тезис «всё из Бита» (It from Bit) и концепцию творческого участия человека в событиях Вселенной. Подытоживая своё профессиональное развитие, он писал: «Моя жизнь представляется мне разделенной на три периода. В первый… я был захвачен идеей, что “Все – это частицы”. Второй период я называю “Все – это поля”. Теперь же я захвачен новой идеей: “Все – это информация”. Чем больше я размышляю о квантовых тайнах и о нашей собственной способности постигать тот мир, в котором мы живем, тем больше вижу фундаментальное значение логики и информации как основы физической теории. Все из бита (It from bit). Иными словами, все сущее – каждая частица, каждое силовое поле, даже сам пространственно-временной континуум, – получает свою функцию, свой смысл, и в конечном счете самое свое существование – даже если в некоторых контекстах не напрямую – из ответов, извлекаемых нами с помощью физических приборов, на вопросы, предполагающие ответ “Да” или “Нет”, из бинарных альтернатив, из битов. “Все из бита” («It from bit») символизирует идею, что всякий предмет и событие физического мира имеет в своей основе – в большинстве случаев в весьма глубокой основе – нематериальный источник и объяснение; что то, что мы называем реальностью, вырастает в конечном счете из постановки “да или нет” вопросов и регистрации ответов на них при помощи аппаратуры; коротко говоря, что все физические вещи в своей основе являются информационно-теоретическими и что Вселенная требует нашего участия» [22].

Эту цитату нередко приводят, чтобы подчеркнуть идеалистическую позицию автора. Действительно, по убеждению Уилера, каждый элемент физического мира имеет в своей основе – на самом глубинном уровне, нематериальный источник. На наш взгляд, в такой оценке подхода Уилера проявляется «застарелый» стереотип – нематериальный, значит, идеальный. Но ведь Уилер сам не говорит об этом. Скорее, его утверждение можно понять в духе известного утверждения Н. Винера – информация есть информация, а не материя и не энергия.

С нашей точки зрения, Уилер фактически выдвигает постулат об онтологическом статусе информации.

Другая часть цитаты – объяснение того, что мы называем реальностью, – в конечном счете возникает из постановки *да-нет* вопросов, на которые призвано отвечать регистрирующее оборудование – имеет явный эпистемологический аспект. Сейчас уже никто не спорит о конструкторской роли учёного, создающего определённую приборную ситуацию, которая и определяет наблюдаемую природу квантового объекта – волну или частицу. В этом смысле и «Вселенная требует нашего участия», ведь это мы сами создаём самые разнообразные приборы и аппараты для её изучения. Категории субъекта и объекта неразрывно связаны, когда речь идёт о процессе познания.

Не случайно на 14-м Международном конгрессе по логике, методологии и философии науки (Франция, Нанси, 19–26 июня, 2011) в нескольких докладах и выступлениях утверждалось, что в сфере эпистемологии начался поворот, получивший название информационно-теоретического [23].

Проходившие в рамках Конгресса дискуссии показали, что существует новая тенденция в философии науки, фиксируемая в возрастающем проникновении в методологию конкретных наук – физики, биологии, когнитивных наук – теории информации.

Современный философ науки Роберт Спеккенс (Канада) в своём докладе говорил даже о «вторжении» теории информации в современное естествознание.

Автор одного экспериментального исследования физик-теоретик из Чикагского университета, директор Центра астрофизики элементарных частиц Национальной лаборатории ускорителей им. Энрико Ферми (Фермилаба) Крейг Хоган убежден, что на уровне супермалых, планковских масштабов пространство, являясь квантованным, состоит из информационных так называемых кубитов.

В настоящее время проводят различие между синтаксическим, семантическим и прагматическим аспектами информации. Синтаксическая составляющая – это количественный аспект; семантическая – это смысловой аспект информации, а прагматический аспект информации выражает её полезность для достижения определённых целей.

Так, Марек Зуковски (Польша) подчеркнул, что практический эффект состоит в использовании сравнительно новой дисциплины квантовой теории информации в современных технологических разработках. Среди них особенно выделяются такие направления, как создание квантовых компьютеров, осуществление квантовой телепортации, развитие квантовой криптографии, конденсированное хранение информации; удешевление связи.

На Конгрессе проблеме философии информации был специально посвящен доклад американского философа науки Джеффри Баба с символическим названием: «Эйнштейн и Бор встречают Алису и Боба». Уже не раз отмечалось, что Эйнштейн и Бор вели долгие годы полемику по поводу адекватной интерпретации квантовой механики. В первоначальной версии копенгагенской интерпретации квантовой механики её авторы использовали понятие информации как синоним *знания*, которое учёные фиксируют в результате измерений физических характеристик квантовых систем.

По мысли докладчика, теперь открывается возможность для нового варианта интерпретации квантового состояния как креативной субъективной информации, получаемой субъектами, взаимодействующими через приборы с квантовыми системами. Эта информация и есть описание самой физической реальности, которая в то же время конструируется самим субъектом.

Постулируется положение, что квантовое состояние – это не объективное свойство индивидуальной квантовой системы, а информация, добытая из знания о том, как система была подготовлена и как она может быть использована для того, чтобы делать предсказания относительно будущих измерений.

Известный отечественный философ науки Е.А. Мамчур предложила назвать такую интерпретацию *информационной интерпретацией квантовой механики* (сокращенно – ИИКМ).

В докладе «Об информационных схемах в биологии» Паоло Латтанцио и Рафаэле Масцелла выдвинули гипотезу, что теория информации является новым основанием научного объяснения сущности жизни. Понятие информационных программ сейчас успешно используется в различных биологических дисциплинах – от молекулярной генетики (понятие закодированной в ДНК наследственной информации) до нейробиологии (структура и функции нейродинамических кодов в процессе переработки информации в мозге), а также в поведенческой экологии (сигнальные знаки, которыми обмениваются живые существа как носители информации о состоянии своего организма и окружающей среды).

В ходе обсуждения доклада было высказано предложение о необходимости и важности создания общей эпистемологической базы для интерпретации всех природных явлений как системы информационных креативных процессов.

В последнее время серьёзный вклад в разработку проблематики философии информации вносит профессор Хертфоширдского университета (Великобритания) Лучано Флориди (Luciano Floridi). В январе 2011 г. Издательство “Oxford University Press” выпустило в свет его монографию «Философия информации». Флориди выдвинул концепцию, согласно которой информация – это такого же рода философское понятие, как и категории бытия, жизни, разума, знания, добра и зла. Более того, по мнению Флориди, традиционные философские понятия могут быть выведены или определены через разного рода информационные термины [24; 25].

Согласно автору, с помощью компьютерных программ изменяются способы, с помощью которых философы рассматривали такие категории, как «творчество», «разум», «знание», «опыт». Складывается новая философская парадигма, где главным является разработка информационно-теоретических методов для решения традиционных и новых философских проблем.

Флориди, как и известный математик Д. Гильберт в 1900 г., сформулировал 18 фундаментальных проблем философии информации, которые он сгруппировал в пяти разделах: 1) анализ концепции информации; 2) семантика; 3) исследование разума; 4) взаимосвязь между информацией и природой; 5) информационный анализ ценностей.

Заметим, что Флориди фактически отождествляет информацию со знанием, считая что она обладает такими атрибутами, как осмысленность и истинность. В противном случае мы имеем дело с дезинформацией. Кроме того, Флориди вводит понятие информационной этики, полагая, что объекты мироздания обладают не только информационной ёмкостью, но и в своей взаимосвязи и совокупности указывают на объективную благость Универсума, не зависящую от человеческих этических суждений.

На наш взгляд, такой ход мысли очень напоминает теорию Платона о творении космоса Демиургом в «Тимее» [26].

Но в целом – насколько корректно поставлены проблемы и релевантны предложенные автором решения – предмет дальнейшего анализа.

Подчеркнём, что к решению этих проблем активно подключаются в последнее время отечественные учёные. Так, обсуждению философских проблем информации и основ информатики был посвящён целый выпуск научного журнала «Метафизика» (2013, № 4 (10)).

На страницах этого журнала также проводится анализ основных парадигм современной теоретической физики – теоретико-полевой, геометрической и реляционной. Выявляются особенности, сильные и слабые стороны этих парадигм, а также границы их применимости [27].

Несмотря на все различия, метафизические основания данных парадигм могут быть сведены к единой информационной основе. Во всех этих парадигмах используются теоретические концепты и математические расчёты, которые далеко отходят от позиций обыденного опыта и классической науки. Однако именно в этих предельной степени абстракциях – информационной реальности – и выражается онтологическая значимость современной науки.

Известно, в Книге Премудрости Соломона сказано: «…Ты все расположил мерою, числом и весом».

Действительно ли мы живём в информационной Вселенной и открываем в своём творчестве [28] её (Его?) программы в Космосе и на Земле? Это – проблемы, которые являются глобальными для современной науки и философии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Информационный подход в междисциплинарной перспективе: материалы «круглого стола» // Вопросы философии. – 2010. – № 2. – С. 84–112.
2. *Урсул А.Д.* Природа информации: философский очерк. – 2-е изд. – Челябинск: ЧГАКИ, 2010.
3. *Иванов А.В., Миронов В.В.* Университетские лекции по метафизике. М.: Современные тетради, 2004.
4. *Чернавский Д.С.* Проблема происхождения жизни и мышления с точки зрения современной физики // Успехи физических наук. – 2000. – Т. 170. – № 2. – С. 157–183.
5. *Мелик-Гайказян И.В.* Информационные процессы и реальность. – М.: Наука, 1997.
6. *Менский М.Б.* Квантовая механика, сознание и мост между двумя культурами // Вопросы философии. – 2004. – № 6. – С. 64–74.
7. *Менский М.Б.* Концепция сознания в контексте квантовой механики // Успехи физических наук. – 2005. – Т. 175. – № 4. – С. 414–435.
8. *Пенроуз Р.* Новый ум короля: О компьютерах, мышлении и законах физики. – М.: Едиториал УРСС, 2005.
9. *Кушелев В.А.* Метафизика и физика о природе парадокса времени // Философия физики: актуальные проблемы: международная научная конференция. Москва, 17–19 июня 2010 г. – С. 75.
10. *Эйнштейн А.* О методе теоретической физики (1933) // А. Эйнштейн. Собрание научных трудов. – Т. IV. – М.: Наука, 1967.
11. *Ефремов А.П.* Вселенная в себе и пути познания // Метафизика. – 2011. – № 4. – С. 112–113.
12. Антология мировой философии: в 4-х т. – Т. 2. – М., 1970.
13. *Юлина Н.С.* Тайна сознания: альтернативные стратегии исследования // Вопросы философии. – 2004. – № 10.
14. *Яковлев В.А.* Информационное единство бытия: сознание, жизнь, материя // NB: Электронный журнал «Философские исследования». – 2013. – № 10. – С. 1–57.
15. *Гинзбург В.Л.* «Физический минимум» – какие проблемы физики и астрофизики представляются особенно важными и интересными в начале XXI века? // Успехи физических наук. – 2007. – № 177.
16. *Иваницкий Г.Р.* XXI век: что такое жизнь с точки зрения физики? // Успехи физических наук. – 2010. – Т. 175. – № 4. – С. 348–349.
17. *Гуссерль Э.* Философия как строгая наука. – М.: «Логос», 1911. – Кн. 1. – С. 4.
18. *Иванов А.В., Миронов В.В.* Университетские лекции по метафизике. М.: Современные тетради, 2004.
19. *Пенроуз Р.* Новый ум короля: О компьютерах, мышлении и законах физики. М.: Едиториал УРСС, 2005. С. 124.
20. *Кулаков Ю.И.* Теория физических структур – математическое основание фундаментальной физики / Метафизика. Век XXI: сб. трудов. – М.: Бином, 2006.
21. *Гуссерль Э.* Идеи к чистой феноменологии и феноменологической философии. – М.: ЛАБИРИНТ, 1994. – С. 33–34.
22. *Wheleer J.A.* Information, physics, quantum: The search for link. // in Zurek (ed.) Complexity, Entropy and the Physics of Information, Addison-Wesley, 1990.

23. *Мамчур Е.А.* Информационно-теоретический поворот в интерпретации квантовой механики: философско-методологический анализ // Вопросы философии. – 2014. – № 1. – С. 57–71.
24. *Floridi L.* The philosophy of information: ten years later // Metaphilosophy / ed. by A.T. Marsoobian. – Oxford, UK. – Vol. 41. – № 3. – April 2010. – P. 420–442.
25. *Floridi L*. Open problems in the philosophy of information // Metaphilosophy / ed. by A.T. Marsoobian. – Oxford, UK. – Vol. 35. – № 4. – July 2004. – P. 554–582.
26. *Яковлев В.А.* Философия творчества в диалогах Платона // Вопросы философии. – 2003. – № 6. – С. 142–154.
27. *Владимиров Ю.С.* Состояние и перспективы исследований в рамках геометрической парадигмы // Метафизика. Научный журнал. – 2014. – № 3. – С. 43–58.
28. *Яковлев В.А.* Метафизика креативности // Вопросы философии. – 2010. – № 6. – С. 44–54.

METAPHYSICS OF INFORMATION REALITY

V.A. Iakovlev

A new information theory approach is substantiated to the problem of being. The thesis is advanced that information reality (being of information) given to the subject in sensations, instrument readings and computations becomes a synonym of a unified objective reality.

Key words: information, being, reality, consciousness, mathematics, phenomenology, creativity, synergetics, physics.

СКРЫТЫЕ ЭТАЛОНЫ МАТЕМАТИКИ РАБОТАЮТ В ФИЗИКЕ СОВМЕСТНО С МЕТРОЛОГИЧЕСКИМИ ЭТАЛОНАМИ

А.В. Коганов

Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук (НИИСИ РАН)

В статье рассмотрен вопрос о причинах эффективности прикладной математики, в частности, в приложениях к физике. Автор отстаивает точку зрения, что главная особенность математики, делающая ее сильным инструментом для изучения природных явлений, это единственность интерпретаций базовых математических понятий и, как следствие, однозначность свойств построенных на их основе моделей. Анализируются средства достижения такой однозначности путём выработки особых эталонов интерпретации математических терминов. Рассматривается парадокс возникновения альтернативных моделей одного явления при соблюдении однозначности свойств в каждой модели. Особое внимание уделено взаимодействию эталонов математики и эталонов других наук, как качественных, так и метрологических.

Ключевые слова: логика, математическая модель, симметрия, теоретическая физика, эталон, измерения.

Введение

Математика и физика настолько родственные науки, что говорить о применении математики в физике, строго говоря, некорректно. Эти науки развивались параллельно, формируя друг друга. Тем не менее они всегда были разными науками. Трудно сказать, когда возникли зародыши этих наук в древнем человеческом обществе. Математика началась, видимо, со счета предметов. Примерно тогда же проявились и начала физики в форме изготовления и использования первых инструментов. Интересно, что взаимодействие и различие этих наук возникли сразу. Не вдаваясь в подробности, можно уверенно говорить о том, что у разных мастеров и охотников были разные оценки самих инструментов и материала для обработки. Наверное, каждому больше нравился свой привычный инструмент и материал. А вот с тем, что три топора больше чем два топора были согласны все. Думаю, вопрос, что больше: два топора или два копья, вызывал споры при первобытных торговых сделках. По сути, это было первое столкновение людей с проблемой физической размерности чисел. Нам и сегодня трудно сравнивать вес и длину. Все зависит от целей использования предметов. В последующие эпохи жрецы математики размечали стройплощадки храмов и крепостей, определяли нужное число строителей и стройматериалов. А жрецы физики организовывали строительство и сооружали необходимые машины. Притом часто это были одни и те же люди. И снова выявлялось отличие двух наук. Спорить с нехваткой ресурсов и площадей было невозможно. А вот машины можно было делать разные, применяя особые инженерные решения. В период становления европейской науки, условно, начиная с Пифагора, арифметика, безусловно, относилась к математике, а вот геометрия была скорее основой примитивной физики. Интересно, что в школе Пифагора их объединяла музыка. Дело в том, что музыкальная гармония рассчитывается на основе пропорций длин струн. Тут надо и струну измерить, и отношения чисел посчитать. Поэтому в те времена арифметика, музыка и геометрия преподавались как одна наука. Так длилось около трех веков. Собственно физика ведет свой отсчет времени от Архимеда, когда он добавил измерение сил и скоростей к геометрии, которая изучала длины, площади и объемы. Но его самого современники называли геометром. Чуть раньше Эвклид придумал, как ввести логику Платона в геометрию. Он дополнил системы измерений постулатами, исходными логическими утверждениями, чтобы доказывать теоремы рассуждениями, а не явными построениями фигур, как это делал Пифагор и его ученики. После этого геометрию стали относить только к математике, усматривая в ней не науку об измерениях, а высший божественный смысл. Насколько сейчас известно, Аристотель дал первую классификацию наук, где физика и математика были явно отнесены к разным областям знания. Но фактически в апориях Зенона уже сквозила эта идея. Он показал, что физические рассуждения, мысленный эксперимент, могут разрушать логические построения. Говорят, у них с Платоном и до драки доходило. Интересно, что все эти события произошли в одно столетие, даже по нынешним временам очень быстро.

По мнению автора, именно тогда и была допущена ошибка, сохранившая свое влияние до наших дней. В силу своей философской системы Платон наделял логику высшим по отношению к природе смыслом. Поэтому переход геометров к логическим конструкциям сразу стал восприниматься как уход от изучения природы к изучению высших истин. Только в двадцатом столетии, спустя две тысячи триста лет, ученые задумались над природой самой логики и постулатов. К этому привело появление парадоксов при попытке изучать саму логику средствами логики. Сейчас этот период известен как период кризиса теории множеств. Удивительно, но по времени он совпал с кризисом постулативной базы в физике. Эксперименты со светом не совпадали с предсказаниями теории. Никакой общей исторической или научной причины для совпадения этих кризисов не было. В чем же заключалась ошибка античных философов и ученых? Они считали логику Платона единственно возможной. Возводить научные принципы в ранг абсолюта вообще было характерно для европейской науки эпохи Возрождения. С одной стороны, это способствовало становлению научного мировоззрения в культуре, где главной идеологической посылкой был единый Бог. Но, с другой стороны, такой взгляд на науку придавал ей черты религиозного догматизма. Вопрос, откуда берутся постулаты наук и законы самой логики, казался бессмысленным. Пути Господни неисповедимы. Между тем в период преодоления кризисов было обнаружено, что не все наши исходные посылки объективно обусловлены природой. Гром грянул несколько раньше, когда работы Лобачевского и Римана показали возможность разных геометрий. Примерно через сто лет стало ясно, что и логика может иметь много реализаций. И, конечно, постулаты наук о природе тоже могут меняться под влиянием экспериментов. Но интуитивно мы понимаем, что этот произвол ограничен. Есть нечто общее, что выделяет научные теории и научное знание из всего, что люди говорят и знают. Для понимания этого отличия надо подробнее рассмотреть природу человеческой речи.

Данная статья не является строгим изложением соответствующих разделов науки. Главной задачей будет выявление особенностей математики как средства моделирования природных явлений. Автор надеется обосновать мнение, что эффективность математики обусловлена особой системой её языка, которая обеспечивает однозначную интерпретацию теоретических конструкций. Если свойства математической модели в своей интерпретации совпадают с натурным экспериментом, то модель становится объективной заменой эксперимента. В этом случае она позволяет подменить исследование реального объекта вычислениями его свойств. Если же модель показывает расхождения с опытом, то в силу однозначности интерпретации это невозможно скрыть. В этой ситуации надо искать новые варианты модели. Таким образом, математика подсказывает верную структуру изучаемого явления, или, по крайней мере, указывает на то, что мы неверно понимаем эту структуру. Рассмотрим, как достигается однозначность интерпретации и универсальность моделирования в математике.

1. Структура научного языка

Мы передаем друг другу информацию словами. Слова образуют синтаксические конструкции, обеспечивающие их совместную интерпретацию, обычно отличную от набора интерпретаций отдельных слов. А что такое интерпретация текста? Речь в любой форме своего воплощения (звуки речи, геометрические знаки, изобразительные рисунки, музыкальные фразы и т.п.) – это только сигналы для нервной системы человека, предполагающие некоторую реакцию этого человека. Иногда это реакция внешняя, вызывающая прямое действие, например, команда «марш(!)», иногда – реакция установки или снятия запрета на действие, например, красный или зеленый сигнал светофора, иногда чисто внутренняя реакция переживания каких-то эмоций, что характерно для искусства. Практически всегда этой реакции сопутствуют ассоциации, воспоминания о каких-то событиях или предметах. Для нас, в теме данной статьи, очень важно выделить два типа речевых сигналов (далее, назовем их фразами в самом общем смысле). Одни фразы вызывают у всех (или почти всех) людей, носителей данного языка, практически одинаковые ассоциации и действия. Другие фразы порождают индивидуальные ассоциации, разные у разных людей, одинаково владеющих языком. Иными словами, можно выделить классы фраз с однозначной и с многозначной ассоциацией. Это разбиение не категориальное. Имеются фразы, которые однозначно интерпретируются в некоторой группе людей, но в остальном обществе вызывают неоднозначные ассоциации. Иногда, наоборот, неоднозначность ассоциаций относится к малой группе. Поэтому однозначность интерпретации фразы в общем случае зависит от рассматриваемой референтной группы людей. Примером сигналов с однозначной интерпретацией может быть цвет светофора для референтной группы людей, знакомых с правилами уличного движения. Примером сигнала с принципиально неоднозначной интерпретацией может служить «Черный квадрат» Малевича для референтной группы знатоков живописи. Вне референтной группы это, однозначно, просто черный квадрат. Как правило, профессиональный язык в любой области деятельности формирует у специалистов однозначные интерпретации для особого набора слов, которые так и называются «специальные термины». И в первую очередь это относится к науке.

В науках о природе эти термины обычно относятся к объектам или явлениям природы и к инструментам исследования. Способ обучения людей этим терминам заключается в предъявлении интерпретирующих объектов и их названий. В гуманитарных науках и искусствоведении однозначность трактовок обычно относится к именам авторов концепций или произведений искусства, а также к названиям самих концепций и произведений. Это предметный уровень таких наук. Если возникает спор об объектах, выходящих за рамки предметного уровня, то спор объявляется беспредметным, что означает невозможность его разрешения в рамках данной науки при ее нынешнем состоянии. Иногда для усвоения специальных терминов требуются особые способности. Например, для хорошего различения звуков, соответствующих нотным знакам, требуется абсолютный слух. А для оценки колорита живописных произведений иногда требуется утонченное чувство цвета. У художников оно достигает различения нескольких тысяч оттенков при норме около трехсот оттенков.

В этом отношении естественные и точные науки менее прихотливы. Поскольку их конечная задача обеспечить общезначимую технологию в своей области применения, то базовые понятия формируются на основе объектов и их свойств, различимых абсолютным большинством людей. Относится это и к физике. В её основе лежат измерительные приборы, которые должны давать общепонятный результат. Сложность конструкции таких устройств маскируется общедоступными выходными циферблатами и интерфейсами дисплея. По сути, метрология решает одну задачу: дать всем людям единое стандартное представление о физических параметрах объектов. Для этого вводятся специальные эталоны, по которым поверяются все измерительные приборы. Референтной группой являются специалисты, осуществляющие или использующие измерения соответствующих параметров.

Из сказанного ясно, что стандартизация научного языка достигается путем установки стандартных названий для стандартных объектов науки. Из этого простого факта следует неожиданный вывод. Профессиональный язык не определяет свойств объектов науки. Он их только фиксирует в специальной терминологии. Сами же свойства определяются путем реального (не теоретического) исследования предметов данной науки. Например, изобретение микроскопа очень сильно изменило наблюдаемую структуру биологических объектов, но названия ранее известных животных не изменились. Однако в эти термины стали вкладывать новый смысл. То же относится и к названиям планет после изобретения телескопа. Это верно для всех наук, кроме одной. Исключением является математика.

2. Особенность математического языка

В математике свойства объектов, принадлежащих теории, полностью задаются формальным словесным определением каждого объекта. Это исключительное отличие математики от всех других способов использования человеческой речи.

Ближе всех к такому состоянию подходит философия. Однако в этой науке определения носят не логический, а ассоциативный характер и задают только базовые ассоциации между определяемым объектом и другими понятиями и объектами. Использование философских определений предполагает постоянную коррекцию значения философского термина со свойствами реальных примеров из его интерпретации. Без этого они приводят к абсурдным выводам, что иногда наблюдается у неопытных или недобросовестных философов. Например, достославное определение жизни как формы существования белковых тел (Ф. Энгельс «Анти-Дюринг») строго логически порождает теорему, что вареное яйцо является формой жизни. Кстати, сам Энгельс понимал это и предупреждал, что это не определение, а только отрицание сверхъестественных составляющих в живой природе. Он считал, что дать логическое определение живой материи невозможно. Но его последователи забыли об этих предупреждениях, им так было удобнее. То же самое произошло с известным ленинским определением материи как «реальности, данной в ощущениях». И снова автор предупреждал, что это не определение, а только характеристика. И опять его не послушались ученики. В результате логически можно доказать теорему, что вещи, запертые в комнате, где нет людей, не материальны. Практически философии противопоказаны строгие логические определения, поскольку при этом теряется ассоциативная полнота теории. А противоречия в философии являются скорее стимулом для диспута, чем недостатком науки. Философия – это почти искусство. Специальные термины философии строятся по типу гуманитарных наук.

Однако в математике именно привязка языка к правилам логического вывода стала основой науки. И для того, чтобы теория не порождала внутренних противоречий, требуется однозначность трактовки всех терминов. Во-первых, должна иметь место однозначность правил логического вывода.

Во-вторых, все термины должны иметь такие вербальные определения, которые приводят к однозначному логическому выводу относительно любого свойства этого объекта.

Истинность при этом имеет более чем два значения. Кроме результата анализа «свойство есть» или «свойства нет» возможны еще варианты «свойство не зависит от аксиом и определений данной теории», «свойство зависит от аксиом, но не может быть доказано конечным рассуждением», и даже «свойство является гипотезой при нынешнем состоянии науки». Последнее означает, что не удалось получить ни один из перечисленных иных результатов. Интересно, что логика при этом остается двузначной. Перечисленные варианты истинности образуют полный набор альтернатив. Каждый из результатов либо верен, либо нет. Вариант «гипотезы» носит, вообще говоря, переходящий характер. В процессе развития науки он может смениться на один из вариантов «верно», «ложно», «независимо», «недоказуемо». Так было с проблемой четырех красок, великой теоремой Ферма, проблемой континуума. Две первые гипотезы сменились на «верно», а последняя – на «независимо». Пример недоказуемых утверждений приведен в теореме Геделя. Строго говоря, возможен еще и вариант «определение объекта приводит к противоречию» или «противоречивость определения». Это означает, что в данной теории объект с таким определением рассматривать нельзя. Но при этом он иногда может нормально существовать в иной аксиоматике или в иной логической системе. Важно, что любой из указанных типов истинности устанавливается однозначно. Даже если установлена противоречивость определения, это устанавливается для всех математиков сразу. Следовательно, внутри математики, как науки, противоречия не возникает. Все согласны, что данное определение недопустимо. Это объясняет устойчивость математики к возникновению парадоксов.

Другой вопрос, как достигается однозначность трактовки логических операций и терминов, входящих в аксиомы теории? Может возникнуть иллюзия, что надо просто дать достаточно длинное определение, исключая лишние трактовки. Но если проследить последствия такого пути, можно убедиться в его недопустимости. В логике запрещены порочные круги. Это означает, что в полном определении любого термина сам этот термин должен отсутствовать. Допустим, мы записали определение некоторого термина. В этом определении есть другие термины, которые тоже надо определить. В их определениях нет этих терминов, но есть другие слова, которые тоже надо определять. Этот процесс будет продолжаться неограниченно, причем на каждом этапе будут появляться новые слова. Даже бесконечное количество слов не решает проблему однозначности, поскольку в этом процессе не порождается последний уровень начальных понятий. Вербальные определения не позволяют реализовать однозначность интерпретации терминов.

Выход из этого противоречия только один. Надо найти способ невербально определять термины математики. Именно так и устроено сегодня математическое образование. На самой начальной стадии обучения ученику предъявляются на физическом уровне объекты, которые интерпретируют базовые понятия математики. Этот процесс так глубоко запрятан в начальном образовании, что многие профессиональные математики не могут объяснить, откуда у них начальные представления. Нередко можно слышать высказывания о трансляции математики «свыше». Но всё, к сожалению, проще. Начала математики совсем не похожи на математику и потому не воспринимаются как часть математики.

В работах [1-3] автор провел анализ начальных физических объектов, которые выступают как своеобразные эталоны для интерпретации начал математики. Всего автор насчитал 14 эталонов, из которых 10 используются непосредственно в математике, а 4 устанавливают связь математики с приложениями и облегчают процесс обучения. Перечень этих эталонов по статье [1] для удобства читателя полностью приведен в приложении.

Формирование эталонных понятий возможно только при непосредственном взаимодействии ученика и учителя. Оно включает предъявление образцов, активные попытки использования понятий и правил, обнаружение и исправление ошибок. Характер этих эталонов далек от образа математики. Например, нужно изучить алфавит, научиться разборчиво писать и узнавать символы. Надо понять, что может являться носителем информации. Бумага годится, глина годится, а вот вода или масло – нет. Жидкости не сохраняют надпись. Нужно усвоить, что имеется строгий порядок действий, который нельзя нарушать, но иногда можно найти другую цепочку операций, которая даст тот же результат. Нужно понять и научиться делать простейшие преобразования текстов, такие как замена одного символа другим по всему тексту или в определенных местах, удаление заданного фрагмента или дописывание и вставка фрагмента. К числу прикладных эталонов относится, например, построение частного примера для общего правила и, наоборот, формирование общего понятия по ряду примеров. В этом случае эталоном является умозрительное действие. Определить эти действия словами нельзя, поскольку такое определение само по себе будет обобщением частных случаев. Все определения вторичны по отношению к этому эталону. Сам процесс формирования эталонов пока не стандартизован и требует особого педагогического таланта. Но проверка усвоения материала уже достаточно формализована. Различные педагогические методики начального образования, по сути, являются попыткой создать эталон формирования эталона.

Обучение базовым «предлогическим» эталонам математики можно рассматривать как начальный этап формирования референтной группы людей, которые могут правильно воспринимать эту науку. Следующий этап обучения формирует логику и способность строить и понимать математические модели реальных явлений.

3. Математическая логика

На основе базовых эталонов можно ввести правила рассуждения. Идея основателя или изобретателя логики Платона состояла в избавлении человечества от бесплодных споров, основанных на жонглировании словами без определенного смысла. За триста лет до него другой античный ученый, Пифагор уже пытался бороться с софистами. Он требовал, чтобы каждое утверждение сопровождалось предметной интерпретацией или интерпретирующим действием. Тогда споры можно было разрешать на основе непосредственного изучения этих интерпретаций. Даже математические теоремы он доказывал путем предъявления геометрических построений или примеров арифметического счета. Однако в те времена он вступил в конфликт с юридической практикой Древней Греции, основанной на софистических доказательствах, использующих многозначность интерпретации слов. Под угрозой смерти ему пришлось бежать на территорию будущей Римской империи. Там он создал школу, заложившую начало логико-эмпирической науки. Но и там он вызвал недовольство власть имущих. Школа была разгромлена, а его ученики, пифагорейцы, создали тайную организацию бродячих проповедников научных истин.

Прошло три века, пока идеи их учителя вновь обрели явных сторонников. Но теперь Платон пошел дальше. Он решил заставить сами словесные конструкции разрешать споры. Его учитель и оппонент Зенон сомневался в такой возможности. Он предложил серию рассуждений, внешне безукоризненных, которые доказывали явно неверные факты. Вероятно, он подразумевал главенство натурных наблюдений над рассуждениями, но напрямую он этого не говорил, а только разрушал веру в логику. И тем не менее, Платон нашел замечательных последователей, таких как Эвклид и Архимед, которые совместили реальную практику человека с теоретическим описанием этой практики. Они использовали начальную эталонизацию интерпретации научных терминов, исключив (почти) злоупотребление подменой смысла слов. Начало заложил сам Платон, предложив четкие правила построения научных фраз и правила вывода из нескольких правильно построенных фраз новой правильной фразы. Тогда же он запретил порочный круг в доказательстве (это эталонный запрет в правилах вывода). Так он предлагал разрешать споры. Хочешь возразить, скажи, с какими исходными посылками ты не согласен, и строй новую теорию. При совпадении исходных посылок выводы становились однозначными для всех.

С тех пор основная идея строгой логики не изменилась. Только правила рассуждений современная наука воспринимает не как объективные законы природы, а как специальную договоренность между людьми. Для достижения согласия нужно договориться не только об исходных посылках, но и о логике рассуждений. Бывает так, что люди, придерживающиеся разных логик, приходят к разным выводам из общих исходных посылок. Но если логики предварительно оговорены, то говорят о разных версиях теории, а не о противоречии в теории, поскольку спор не возникает. В тех случаях, когда выводы имеют реальную интерпретацию, верный вариант теории выбирают опытным путем. Если же выводы чисто теоретические, то разночтение остается навсегда и интерпретируется как разные научные школы. Такая ситуация, например, возникла между теоретико-множественной и конструктивной математикой. В работах [4-7] автор показал практическую невозможность совмещения аксиоматики теории множеств, конструктивной логики и рекурсивных функций без возникновения противоречий. Но в каждой из этих теорий противоречий нет.

В работах [4, 8, 9] автором предложен способ стандартного изменения аксиоматики, если она порождает противоречие (метод расщепления истины). Для подавления противоречия предлагается изменить правила логики, введя ранжирование аксиоматики. Некоторые доминирующие аксиомы имеют более высокий ранг, запрещая использование правил вывода к утверждениям теории, если это приводит к противоречию с этими аксиомами. Тогда появление противоречия в теории можно подавить, введя расщепление этой теории на две новых теории, в одной из которых добавляется в качестве доминирующей аксиомы один из полученных выводов, а в другой – его отрицание. Некоторые противоречия подавляются конечным числом доминирующих аксиом, а другие вызывают бесконечный каскад ветвления теорий. Но уже выявленные противоречия заново не возникают. Другим, хорошо известным методом подавления противоречий является запрет на использование в выводе тех новых утверждений, для которых уже были получены их отрицания. При этом устраняются также все выводы, которые сделаны с помощью этого отрицания. Такой прием назван методом границ. По сути, это частный случай расщепления истины, в котором вводится доминирующая аксиома запрета на вывод из указанных утверждений.

Эти примеры показывают, как современная математика может модифицировать логику для достижения определенных целей. При решении прикладных задач часто приходится использовать приемы борьбы с противоречиями на стадии формирования окончательной модели изучаемого объекта. Но окончательная модель все-таки не должна порождать противоречий и требовать доминирующих аксиом. Не вдаваясь в подробности, можно сказать, что если непротиворечивость обеспечена, то у теории имеется модель, построенная на языке теории множеств. Это означает, что модель имеет структуру составляющих компонент и их взаимодействий, описанных как математические функции. А когда противоречия есть, даже если они подавлены специальными приемами, такой модели у теории нет.

Логика, построенная исключительно на объектах, имеющих эталонную интерпретацию, называется математической. На практике часто используют более ранний вариант логики, в которой правила рассуждений эталонные, но разрешается использовать термины, у которых интерпретация не однозначна. Такую логику называют формальной. В формальной логике невозможно избежать противоречивых выводов. И когда они возникают, есть только один способ исправить положение – разобраться, какие интерпретации исходных понятий были использованы разными теоретиками. Потом приходится вводить уточненные термины, соответствующие различным выявленным интерпретациям. После этого противоречия исчезают, поскольку различные выводы относятся к разным терминам.

Приведу пример. Однажды я присутствовал на споре двух теоретиков музыки, один из которых утверждал, что музыка непрерывна, а другой настаивал, что это зависит от инструмента. Спор длился довольно долго в терминах музыковедения, когда я вдруг понял, что один из них говорит о спектре звука (у скрипки непрерывный, а у фортепиано дискретный), а другой о восприятии музыки во времени. Спор закончился дружеским смехом.

Иными словами, в формальной логике противоречия могут быть двух типов: устраняемые путем уточнения интерпретации терминов, или такие, которые требуют изменения исходных постулатов. В математической логике имеется только второй вид противоречий.

Поскольку противоречия в математике возникают объективно и не вызывают споров, их часто называют парадоксами. Но такое словоупотребление не верно. Парадокс определяется как верное, но странное утверждение, которое кажется ошибочным. Наличие противоречия в математической теории объективно блокирует дальнейшую работу логического аппарата. Его никак нельзя считать верным утверждением. Верно только то, что данная теория, породившая противоречие, неработоспособна. Именно требование непротиворечивости делает особо эффективным использование математических моделей в науках о природе.

4. Математическое моделирование

Слово «модель» по первоначальному смыслу близко к слову «стандарт». Однокоренные слова «мода» (общепринятый стиль чего либо), «модус» (стандартное правило), «модальность» (однотипный класс объектов в некоторой совокупности). Но в науке это слово приобрело новое значение. Модель какого-либо явления – это другое явление, аналогичное первому по известным характеристикам и более удобное для изучения и манипуляций. Пожалуй, слово «игрушка» ближе по смыслу к современному термину «модель». Математические модели вполне отвечают этой интерпретации.

При этом можно отметить, что некоторые модели настолько срастаются в сознании ученых с реальными прототипами, что к ним действительно применимо выражение «стандартная трактовка явления». Никто не спутает игрушечный самолетик с реальным самолетом. Но известную формулу Исаака Ньютона трудно отделить от гравитации как реального явления. У такого свойства математических моделей есть объяснение. Построенные в рамках эталонного языка и логики эти модели столь же объективны по отношению к человеку, как природа. Даже неверная модель задает свой Мир с совершенно непререкаемыми законами. Например, свойства классической механики совершенно не изменились после появления релятивистской и квантовой теорий.

В то же время для техники, биологии, социологии, и даже для новых областей физики и химии математические модели воспринимаются скорее как упрощенные, хотя и удобные игрушки, только очень ограниченно аналогичные своим прототипам. Это связано с быстрым накоплением новых сведений и разработок в этих областях, что требует постоянной корректировки прежних моделей. Системы в современной технике, биологические организмы и социальные процессы настолько сложны, что необходимо время для выделения главных признаков, по которым их надо моделировать. А скорость поступления новых данных не дает завершить такой анализ. Вычислительная техника позволила резко увеличить сложность моделей по сравнению с теоретическим анализом. Но возникла новая проблема. Сами эти модели стали непонятны. Эксперименты над ними требуют почти такой же работы, как натурные исследования. Известны случаи, когда вычислительные эксперименты оказались многократно дороже реальных замеров. Здесь надо учесть еще стоимость программирования, которая не окупается, если модель приходится часто менять. Игрушка становится дороже оригинала. Как сказал один биолог, работавший с математиками в шестидесятых годах прошлого века: «Зачем мне электронная кошка, если у меня полно живых кошек?».

Рассмотрим вопрос, что дает построение параллельного мира математических моделей. В тех случаях, когда модель отработана и хорошо соответствует прототипу, она действительно обладает прогностическими свойствами по отношению к реальному эксперименту. Это очень важно в технике, где такие модели позволяют строить системы управления на основе точных прогнозов. Автор имел опыт такого моделирования, когда модель управляла неустойчивым процессом с испорченными основными датчиками технологических параметров несколько месяцев. Работа шла настолько успешно, что технологи не верили в неисправность датчиков до тех пор, пока та же причина не вызвала механическую поломку. Тогда только поступили извинения.

Но в исследовательской науке многократное использование одной программы маловероятно. Тут математическая модель играет совершенно иную роль. Она подтверждает или опровергает идентичность наших представлений о реальном объекте. Предсказания модели зависят только от тех аксиом, которые мы в нее заложили. Модель нельзя уговорить подогнать результат под эксперимент. Поэтому если модель не верна, то расхождение прогноза и эксперимента укажет на это. Для исследовательских работ характерно итерациями сближать модель с экспериментом. Возникающая структура модели обычно трактуется как структура изучаемого явления.

Надо различать модели двух видов. Модели с фиксированной структурой обычно представляют одну или несколько формул с подстрочными коэффициентами. Для этого класса моделей используется термин «идентификация», означающий выбор этих коэффициентов с оптимизацией какого-то специально оговоренного в модели критерия соответствия объекту. Такие модели очень удобны для кибернетических систем. Подобрав коэффициенты, по ним можно прогнозировать процесс. Однако для изучения самого процесса они малоинформативны, поскольку мы сами навязываем процессу определенную структуру. Второй класс называется структурными моделями. Эти модели обычно значительно сложнее в вычислительном отношении. В них выделяются и моделируются пространственные и функциональные части, взаимодействие которых порождает модель всего объекта. Сопоставление таких моделей с реальными объектами дело творческое, похожее на изобразительное искусство. Проведя декомпозицию реального прототипа на части, вводятся уравнения их взаимодействия. Эти уравнения обычно содержат параметры, которые можно варьировать для приближения выхода модели к эксперименту. Критерий соответствия тоже выбирается. Очень распространенной разновидностью структурных моделей является метод конечных элементов, где моделируется топология среды, в которой развивается процесс, заданный локальными взаимодействиями.

Интересно, что однозначность поведения математической модели порождает неоднозначность самих моделей, которые можно сопоставить процессу. Это хорошо видно в моделях с фиксированной структурой. Изменение критерия соответствия модели и процесса приводит к другим значениям коэффициентов в процессе идентификации. Но ведь критерий соответствия во многом субъективен. Чаще всего задается некоторая метрика на выходных параметрах модели, в которой минимизируется расстояние от выхода модели до результата эксперимента. И от метрики сильно зависит окончательный вид модели.

В структурных моделях сама схема декомпозиции не всегда однозначно определена. Например, многое зависит от степени детализации модели. Как моделировать нагрев тела: с точностью до молекулы или с огрублением до макроскопических частей? Это очень разные модели. В первом случае получится модель бильярда (классического или квантового), а во втором – полевая модель распространения тепла. Надо отметить, что именно для этих двух видов моделей термодинамики до сих пор не доказана эквивалентность (это только гипотеза). Разумеется, значения параметров взаимодействия частей будут зависеть от критерия соответствия модели не меньше, чем в случае фиксированной структуры.

В рамках данной статьи неуместно заниматься методами оптимизации моделей, но это очень интересная область, от которой во многом зависит окончательный вид модели. Заметим, что выбор квадратичной метрики для отклонений модели от оригинала обычно обусловлен вычислительной простотой оптимизации. Если несколько равно обоснованных моделей дают существенно разные результаты, то только сравнение с экспериментом поможет провести отбор среди них. Идентификация математических моделей требует высокой однозначности измерений в экспериментах. За это несет ответственность метрология.

5. Связь математических и метрологических эталонов

Метрология относится к наукам физической группы. Ее язык эталонизирован по принципу естественных наук. Специальным терминам сопоставлены реальные предметы и процессы, свойства которых не вытекают из их вербального определения, а устанавливаются в опыте. Но начальные эталоны математики во многом совпадают с собственными базовыми эталонами метрологии. Например, для измерения совершенно необходим эталон заданной последовательности операций. Эталон длины в метрологии заимствует из математики алгоритм Эвклида для измерения долей основной единицы. А вот сама единица длины сугубо физический эталон, не входящий в математику. Но когда длина измеряется с помощью длины волны некоторого излучения, метрологам совершенно необходима математическая модель этого излучения. Причем эта модель в самой математике не относится к первичным эталонам, а задается логическим определением.

Интересно, что с точки зрения логики описанная ситуация содержит порочный круг. Метрология определяет свой эталон с помощью математической модели, а математика строит модель, используя данные метрологии. Но дело в том, что на уровне физических измерений цикличность не запрещена. Можно измерять температуру по расширению ртути, а коэффициент расширения ртути определять с помощью термометра. Кстати, тут использована математическая модель линейной связи прироста температуры и прироста длины стержня.

Коэффициент теплопроводности определяется по ГОСТ как результат идентификации фиксированной структурной модели, основанной на явной разностной схеме уравнения диффузии. А в математических прикладных моделях термодинамики потом используются полученные физические коэффициенты. В этом цикле использована гипотеза воспроизводимости полученных ранее результатов измерения и моделирования.

Точность измерений, основанных на новых принципах, определяется по дисперсии, которую показывают многократные измерения в стандартной ситуации. Расчет дисперсии связан с вероятностной моделью погрешности прибора. Степень стандартизации условий измерения тоже определяется по измерительным приборам.

Такие логические циклы очень типичны для метрологии. Тем не менее это не приводит к крушению науки. Секрет такого положения заключается в эмпирическом факте повторяемости результатов. Если цикл порождает неустойчивость результата, то он просто исключается из метрологии. Циклы, которые обладают итерационной устойчивостью, сохраняются как полезные методы измерений. Удивительно, но в основе метрологии лежит естественный отбор.

Интересно, что именно это свойство устойчивости при повторных применениях заложено в квантово-механическую модель измерения. Измерение порождает собственный вектор оператора измерения, то есть такое состояние квантового ансамбля, которое не меняется при данном измерении. В теории относительности измерение определяется оператором проекции, который также сохраняет результат при повторном применении (свойство идемпотентности).

6. Взаимодействие математики и физики.

В теоретической физике математические модели являются основным, если не единственным методом работы. Результат работы физика-теоретика – это либо новая математическая модель некоторого явления, либо решение математической задачи, связанной с известной моделью. Как правило, но не всегда, это специальное решение общего уравнения теории. В задачу этой статьи не входит разбор конкретных разделов теоретической физики. Наша цель – понять принципы применения математики в физике и разобраться, как развитие физики влияет на математику. Эти науки идут в одной связке.

Следует различать два вида математических моделей в теоретической физике. Первую разновидность можно назвать специальными моделями отдельных процессов. Они претендуют только на правильное описание параметров изучаемого процесса в динамике и под управлением человека или внешних факторов. Вторая разновидность создает математическую модель некоторых принципов, которым должны подчиняться специальные модели. Эти виды моделей различаются не только своими целями, но и характером математического аппарата. Сегодня уже четко осознано, что принципиальная картина мира в физике соответствует заданию симметрии в математике. Симметрии описываются группами для обратимых или полугруппами для необратимых или частично обратимых процессов. Далее будем называть действие на физические модели таких групп или полугрупп алгеброй симметрии. Если общая теория некоторого класса физических явлений требует выполнения некоторой симметрии, то все специальные модели частных случаев этого класса должны быть инвариантны относительно соответствующей алгебры симметрии. Инвариантность означает, что действие любого оператора алгебры симметрии на специальную модель коммутирует с действием любого внутреннего оператора модели.

Эти симметрии содержательно интерпретируются как разные точки зрения наблюдателя на моделируемое явление. Например, это может быть смена механической системы отсчета, из которой наблюдается явление, или переход к другой системе единиц измерения, или изменение ракурса, в котором производится наблюдение, скажем, замена системы измеряемых параметров путем смены приборной базы. Естественно, новое описание явления должно быть эквивалентно исходному описанию, если только явление само не реагирует на наблюдателя. Кстати, последнее условие часто не выполняется в биологии и психологии, что очень затрудняет интерпретацию результатов некоторых экспериментов и наблюдений в этих науках. Но в физике это нормальное требование к чистоте эксперимента. Если от влияния наблюдателя по каким-то причинам нельзя избавиться, то надо строить модель в форме процесса с управлением и учитывать влияние наблюдателя в параметре управления. Закон управления должен удовлетворять той же симметрии. Иными словами, если в специальной модели реализуется некоторая динамика, а модель описана в некотором ракурсе наблюдения явления, то изменение ракурса наблюдения исходных данных должно привести к точно такому же изменению ракурса наблюдения результирующего состояния модели. В этом смысл математического выражения исходных принципов в современной физике.

Физика далеко не сразу осознала роль симметрий в определении базовых принципов описания природы. Интуитивно еще в эллинской культуре картина мира формулировалась так, что в скрытом виде там присутствовали именно симметрии. Но явно это не оговаривалось. Земля диск или шар? Различия этих концепций соответствуют разным преобразованиям симметрии, относительно которых планета переходит сама в себя. Для диска это повороты вокруг одной оси, для шара имеется три независимых угла поворота. Вещество дискретно или непрерывно? Для дискретной модели действуют симметрии кристаллов или локальные симметрии перестановок атомов в аморфном теле. Для непрерывной модели действуют симметрии непрерывных сдвигов и поворотов. А для сжимаемых тел еще и группа локальных деформаций. А для непрерывных жидкостей очень сложная группа изменения формы и разрыва на отдельные капли и их слияний. Но тогда математическая мысль еще не созрела для таких обобщений. Эти модели описывались и дискутировались в более простой геометрической форме.

Первым почувствовал общий принцип великий Галилей. Его законы наблюдения скоростей с разных подвижных платформ уже описаны в форме аддитивной группы. Сам термин появился позднее, но не без влияния трудов Галилея. Возможно, для этой содержательной революции в математике и физике нужна была революция формы записи математических законов, которую мы сегодня называем алгеброй (изначально использовали термин «кочисла» – так называли переменные, обозначенные буквами). Это было первое представление арифметических операций в форме операторов, действующих сразу на все числа. Введение Декартом универсальной системы координат позволило Ньютону сформулировать общие (на тот период истории) законы физики в форме, инвариантной относительно преобразований Галилея. Но дело было не только в математике. Появились новые приборы, прежде всего в астрономии и механике, которые позволили накопить огромный наблюдательный материал. Эталоны математики и метрологии работали вместе.

Осознание симметрии как собственного объекта математики произошло в начале XIX в. благодаря удивительным работам Галуа. Он ввел понятие группы как набора обратимых преобразований на произвольных совокупностях объектов, потребовав замкнутость этого набора относительно последовательного применения и обращения преобразований. На осознание особой роли в математике замыкания набора операторов относительно их итераций в науке ушло более двух с половиной тысяч лет, если считать от арифметики и геометрии Пифагора. После этого на осознание возможности различных симметрий в физике ушло еще сто лет. И для этого потребовался кризис классических моделей природы.

Теория относительности ввела симметрию пространства и времени, при которой скорость света остается инвариантом преобразования. Ядерная физика ввела симметрию для оператора измерения энергии как индикатор типа, к которому относится то или иное квантовое поле. В квантовой механике появилась симметрия оператора измерения, определяющая, с какими операторами он коммутирует. Это определяет возможность совместных измерений нескольких параметров. Группа сдвигов физического тела по своей мировой линии в теории относительности заменилась в квантовой механике на группу динамики волновой функции, что позволило перейти к описанию интерференции при измерениях.

Параллельно происходило построение специальных моделей для отдельных явлений. Обеспечение в этих моделях симметрий, которые устанавливались в фундаментальных теориях, значительно повышало адекватность таких математических описаний и снижало их сложность. Например, отождествление полей с одинаковой симметрией лагранжиана (калибровочная эквивалентность) уменьшило число моделей частиц с нескольких тысяч до двух десятков. Использование симметрии Лоренца позволило единообразно описывать динамику всех частиц при больших скоростях и ускорениях. Перефразируя известный афоризм, можно сказать, что нет ничего практичнее правильной симметрии.

Во всех этих моделях, как бы они ни были далеки от очевидности, однозначность математических описаний позволяет делать четкие предсказания экспериментов. И в случае расхождения возникает объективная необходимость изменения модели. Это и есть эффективность математики в физике. Она создает параллельный мир с объективными законами. И задача понимания природы сводится к обеспечению аналогичности двух миров – модельного и реального.

Приложение

Список необходимых базовых математических эталонов, предшествующих построению и применению логики

Описание эталонов приходится вести на разговорном языке, поскольку их введение предшествует логике. Реальное введение эталонов требует натурной реализации тех действий, которые описаны в нижеследующем тексте раздела. В этом заключается начальный этап обучения математике. Обычно эта работа падает на учителей в школе. Данный текст следует воспринимать не как математическое определение, а как пояснительный (автор предполагает знакомство читателя с описываемыми понятиями).

1. Носитель информации (место записи теории и/или объекта).

Формируется предъявлением бумаги и записи на ней или других средств занесения и хранения символов. Эталонные свойства:

1.1. Носитель имеет места, где можно записывать любые символы.

1.2. Этих мест достаточно для данной теории.

1.3. Эти места адресуемы и упорядочены (обычно порядок линейный).

1.4. Сделанная запись неизменно сохраняется во времени, но может быть изменена волевым путем по мере развития теории.

***

2. Алфавит теории (набор различимых и узнаваемых символов).

Формируется предъявлением букв, цифр, иероглифов, особых значков. Эталонные свойства:

2.1. Алфавит состоит из набора значков, одинаково узнаваемых и различаемых всеми людьми; расширение набора допустимо только такими знаками, которые не путаются с ранее введенными. Поэтому эталоном является не сам знак, а весь набор знаков.

2.2. Два значка либо всегда отождествляются, либо всегда различаются.

2.3. Каждый значок может тиражироваться на носителе в количестве, достаточном для теории, и в форме, отождествляемой с исходной.

***

3. Линейный порядок (последовательность элементов).

Этот объект интерпретируется как во времени, так и в пространстве.

Его свойства похожи на аксиомы натурального ряда чисел. Имеется первый объект. За каждым объектом либо имеется следующий, либо он последний. К любому объекту порядка можно подойти от первого элемента последовательными переходами к последующему элементу.

Формируется предъявлением пространственных рядов или временных последовательностей действий и событий. Вводит слова «раньше, позже, ближе, дальше, выше, ниже, больше, меньше» и т.п. Имеются нейрофизиологические данные о врожденном характере интерпретации и понимания линейного порядка человеком.

4. Совокупность элементов.

Формируется как эталон предъявлением конечных наборов предметов или бесконечных наборов точек в геометрических фигурах. Очень тесно связан с эталонами алфавита и линейного порядка.

Свойства конечных совокупностей включают в себя выполнимость основных операций над множествами, таких как объединение нескольких совокупностей в одну или выделение совокупности объектов, входящих сразу в несколько указанных совокупностей. Можно формировать совокупности предметов, входящих в одну заданную совокупность, но не входящих в другую. Можно формировать совокупности из совокупностей.

Однако все эти действия эталонизируются только для конечного набора предметов. Аналогичные свойства бесконечных совокупностей не являются эталонными и вводятся уже на уровне логических построений.

5. Произвольный выбор из данного множества альтернатив.

Формируется выполнением ответных действий на просьбу «Выбери один предмет из этого набора». Имеется прямая связь с эталоном совокупности, но важным собственным свойством является проявление волевого фактора в действии, происходящем в условиях неопределенности задания. Например, реакция на просьбу взять красный шар из набора разноцветных шаров не входит в формирование произвольного выбора (это относится к эталону цветового алфавита). А вот задание «взять один шар» из того же набора уже включает принятие волевого решения.

6. Шаг рассуждений или построений.

Формируется демонстрацией вычислений, геометрических, конструкторских или логических построений, как элементарный этап этих действий. В последнее время возникла интерпретация через шаг алгоритма или команду программы компьютера. Этот эталон связан с интуитивным образом времени. К существенным свойствам этого эталона нужно отнести требование предварительной подготовленности тех объектов, которые требуются для выполнения шага. Кроме того, шаги образуют линейный порядок, подготавливая условия для выполнения последующих шагов.

7. Подстановка / таблица / отображение.

Формируется демонстрацией замены части текста на другой текст или предмета на предмет по описанным в форме таблиц правилам. Тесно связан с носителем информации и алфавитом. Все вычисления, логические правила и операции вводятся через этот эталон.

8. Тиражирование математического объекта

Формируется демонстрацией копий геометрических структур, графических схем, текстов описаний математических объектов, наглядных пособий и т.п. Эталонным является сохранение в копии всех математических свойств оригинала при различимости копии и оригинала. Кроме того, повторная копия от копии и разные копии оригинала признаются математически равноценными и попарно различимыми. Над разными копиями можно производить независимые действия, которые влияют на свойство только одной копии. Измененная копия перестает быть копией исходного объекта, приобретая новые математические свойства.

9. Обязательное действие в описанной ситуации.

Предполагает обучение распознаванию ситуации по описанию и запрет на все действия, кроме предписанного. Кроме того, имеется эталонная активация действия или запрет на бездействие. Этот эталон включает в себя и понятие запрета. Обучение обычно ведется на играх (обязательные ходы) и использует более ранние элементы воспитания детей.

10. Заучивание текста, действия или образа человеком.

Этот эталон независим от остальных, хотя может показаться, что он – только частный случай записи на носитель. Фактически в математике только заученная человеком информация может играть активную роль. Относится сюда и обучение эталонам.

11. Дополнительные эталоны.

Введенных эталонов 1–10 достаточно, чтобы построить современный математический язык. Однако имеются и другие эталоны, которые сегодня используются в интуитивном мышлении математика, причем для построений, выполненных с помощью этих дополнительных эталонов, существуют стандартные средства перевода на язык, их не использующий. Однако как эталоны они независимы, и такая редукция связана с ограничением на использование их свойств при «современном уровне строгости» в математике. Однако эти дополнительные свойства часто оказываются очень удобными для усиления человеческой интуиции при постановке и решении задач. К таким дополнительным эталонам нужно отнести:

11.1. эталоны простейших геометрических форм (круг, квадрат, отрезок прямой, треугольник, угол, пересечение отрезков);

11.2. геометрические преобразования на плоскости типа сдвига, поворота, совмещения точек фигур при сдвиге, построения циркулем и линейкой;

11.3. отождествление интеграла функции с площадью под ее графиком, а дифференциала – с касательной к графику;

11.4. изображение связей стрелками на графе;

11.5. понятие поощрения и наказания при описании цели действия. Само понятие цели и успеха также является вспомогательным эталоном, однако здесь трудно говорить о строгой однозначности интерпретации, если не введена система поощрений.

Имеется ряд других наглядных приемов, обычно не приводящих к серьезным ошибкам, но помогающих почувствовать математическую задачу.

Нижеследующие эталоны не используются в математической логике непосредственно, но совершенно необходимы математику на семантическом уровне формальной логики. Без них невозможно интерпретировать математику.

12. Пример для общего понятия (частный случай).

Формируется демонстрацией конструктивных примеров объектов, свойства которых удовлетворяют всем требованиям словесного определения класса объектов. При обучении используются задачи на построение таких примеров для заданных определений.

Важным эталонным свойством является неоднозначность перехода от общего определения к частному объекту. Другое эталонное условие – наличие четко сформулированных свойств, определяющих класс. На стадии обучения возможна игра с использованием побочных смыслов слов, входящих в определение. Она позволит отсечь возможные неоднозначности.

Этот эталон предшествует логике и фактически лежит в основе понятия интерпретации математической теории.

13. Обобщающее логическое определение для набора объектов.

Формируется обучением выделять общие признаки у разных конструктивных или реальных объектов. Важным эталонным свойством является неоднозначность перехода от набора объектов к общему определению. При этом свойства определяемого класса зависят только от определения, а не от исходных объектов. В частности, при изменении определения могут меняться некоторые примеры объектов класса, но исходные объекты при правильном определении всегда являются примерами.

Указанные неоднозначности означают, что эталоны примера и определения не являются взаимообратными операциями над информацией, но психологически они взаимодополнительны.

14. Введение эталона.

Имеется еще не вполне сформированный *Эталон Введения Эталонного Понятия*. Ближе всего к нему в современной науке подошли, видимо, метрологи и педагоги. Но в математике он никогда не использовался в явном виде. Главным признаком эталонности термина является адекватность его трактовки разными людьми. Это проверяется совпадением действий и их результатов при выполнении разными людьми инструкций, в состав которых входит этот термин. При обнаружении неадекватности необходимо обратить на нее внимание обучаемых и дать дополнительные разъяснения на уровне словесных описаний или демонстрации с использованием пособий и тренажеров. Последнее очень распространено в математике при обучении геометрическим и программистским терминам.

Можно только предполагать, что расширение прикладного использования математики сделает актуальным систематизацию приемов эталонизации терминов. Видимо, эта область всегда будет относиться к метаматематике.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ), проект 13-01-00190а.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коганов А.В.* Эталонные основы математического языка // Интегральная геометрия. Математические модели. Понимание изображений / под ред. В.Б. Бетелина. – М.: НИИСИ РАН, 2001. – С. 52–80.
2. *Коганов А.В.* Эталонная структура математических теорий // Информатика. Образование. Экология и здоровье человека: сб. – Астрахань, 2001. – С. 153–159.
3. *Коганов А.В.* Эмпирико-эталонные основы математических теорий // Математика и опыт: сб. – М.: МГУ, 2003. – С. 317–340.
4. *Коганов А.В.* Парадоксы принципа произвольной композиции и корректность определения объекта в математике // Число: сб. статей, труды семинара по философии математики. – М.: МГУ, «МАКС Пресс», 2009. – С. 212–234.
5. *Коганов А.В.* Возникновение противоречий в теории множеств Цермело-Френкеля при расширении базового языка рекурсивными функциями // Компьютерные исследования и моделирование. – 2009. – Т. 1. – № 4 / Институт компьютерных исследований (Удмурдский государственный университет), Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН. – С. 367–380.
6. *Коганов А.В.* Ограничения в теории множеств Цермело-Френкеля при расширении языка первого уровня рекурсивными функциями // Материалы международной междисциплинарной научной конференции «Третьи Курдюмовские чтения: Синергетика в естественных науках». – Тверь: ТГУ, 2007. – С. 76–79.

7. *Коганов А.В.* Возникновение противоречий в теории множеств Цермело-Френкеля при расширении языка первого уровня рекурсивными функциями // Философия математики: актуальные проблемы: материалы Международной научной конференции. МГУ, 15–16 июня 2007 г. – М.: Издатель Савин С.А., 2007. – С. 108–110.

8. *Коганов А.В.* Метод расщепления истины в парадоксной защите логики // Тез. докладов XI Международной конференции «Логика. Методология. Философия науки». – Т. 2. – М.; Обнинск, 1995. – С. 37–41.

9. *Коганов А.В.* Анализ произведений искусства методом расщепления истины // Математика и искусство: труды конф. – М., 1997. – С. 170–172.

LATENT STANDARDS OF MATHEMATICS WORK IN PHYSICS JOINTLY WITH METROLOGICAL STANDARDS

A.V. Koganov

This article examines the question of the causes of the effectiveness of applied mathematics, in particular, in its applications to physics. The author maintains that the main feature of mathematics making it a strong tool for studying natural phenomena is the uniqueness of interpretations of basic mathematical concepts and, as a consequence, the unambiguity of the properties of the models built on their basis. An analysis is given of the means of achieving this unambiguity by developing special standards for interpretation of mathematical terms. The paradox of the emergence of alternative models of a single phenomenon, providing the unambiguity of properties in each model, is discussed. Special attention is given to the interaction between the standards of mathematics and the standards, both qualitative and metrological, of other sciences.

Key words: logic, mathematical model, symmetry, theoretical physics, standard, measurements.

СТАНОВЛЕНИЕ И РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АППАРАТА ТЕОРИИ ФИЗИЧЕСКИХ СТРУКТУР

Г.Г. Михайличенко

Горно-Алтайский государственный университет

В статье дан исторический обзор становления математического аппарата теории физических структур с момента ее возникновения в 1960-х гг. по настоящее время. Рассмотрена теория физических структур, предложенная Ю.И. Кулаковым, теория групп Ли преобразований, показан процесс создания специальных методов исследования.

Ключевые слова: физическая структура, феноменологическая симметрия (ФС), групповая симметрия (ГС), эквивалентность ФС и ГС, классификация физических структур.

Исходной идеей, положенной в основание теории физических структур, является принцип феноменологической симметрии (ФС). Этот принцип был сформулирован Ю.И. Кулаковым (см. [1, гл. 4]) как результат анализа строения второго закона Ньютона в механике, согласно которому ускоритель, действуя силой f на материальное тело массы m, сообщает ему ускорение

$$w = f/m.$$

Закон Ньютона можно записать в таком виде, что в нем будут отсутствовать трудно определяемые понятия массы тела m, силы ускорителя f и останется только одно прозрачное по своей физической сути ускорение w, измеряемое специальным прибором – акселерометром.

Введем множество материальных тел $M = \{i, j, k, \ldots\}$, например шариков, и множество ускорителей $N = \{a, b, c, \ldots\}$, например пружинок. Если взять два произвольных тела i и j с массами $m(i)$ и $m(j)$, а также два произвольных ускорителя a и b, действующие на тела силами $f(a)$ и $f(b)$, то для четырех возможных пар их сочетаний по закону Ньютона получим:

$$w(ia) = f(a)/m(i),\ w(ib) = f(b)/m(i),\ w(ja) = f(a)/m(j),\ w(jb) = f(b)/m(j),$$

где, например, $w(ia)$ есть ускорение, сообщаемое телу i действием на него ускорителя a. Нетрудно убедиться в том, что четыре ускорения $w(ia)$, $w(ib)$, $w(ja)$, $w(jb)$ связаны между собой уравнением

$$w(\mathrm{ia})w(jb) - w(ib)w(ja) = 0,$$

представляющим собой второй закон Ньютона в феноменологически симметричной форме.

Оказывается, что это уравнение ФС является следствием принципа феноменологической симметрии и от него можно вернуться к обычной записи закона Ньютона, введя естественным образом массу m и силу f как физические характеристики материальных тел и ускорителей.

Введем, отвлекаясь от физического содержания, удобные для последующего математического изложения следующие обозначения координат точек в множествах M и N, то есть одномерных многообразиях, а также метрической функции на их прямом произведении $M\times N$:

$$x=1/m,\ y=f,\ f=w.$$

Тогда функция f и соответствующее ей уравнение ФС:

$$f=xy,\ f(ia)f(jb)-f(ib)f(ja)=0$$

будут задавать физическую структуру ранга (2,2), как некоторый чисто математический объект. Эта структура является частным решением специального функционального уравнения

$$f=f(x,y),\ \Phi(f(ia),f(ib),f(ja),f(jb))=0$$

в общем определении физической структуры ранга (2,2).

Ю.И. Кулаковым было установлено, что решение этого функционального уравнения единственно с точностью до замены координат точек в многообразиях M, N и масштабного преобразования метрической функции f при условии ее невырожденности, то есть существенной зависимости от координат x и y (см. [1, гл. 14]).

Согласно общему определению физической структуры ранга (2,2) четыре функции $f(ia)$, $f(ib)$, $f(ja)$, $f(jb)$ от четырех переменных $x(i)$, $x(j)$, $y(a)$, $y(b)$ связаны уравнением феноменологической симметрии $\Phi=0$. Необходимым и достаточным условием такой связи является известное из математического анализа ограничение на ранг соответствующей функциональной матрицы, который должен быть меньше четырех. То есть её определитель (якобиан четвертого порядка) равен нулю. Фиксируя в нем точки j из M и b из N, получаем простое дифференциальное уравнение в частных производных, линейное и однородное, решением которого и является единственная физическая структура ранга (2,2), возникшая из проведенного выше анализа строения второго закона Ньютона в механике.

Анализ строения другого закона общей физики, а именно закона Ома для полной цепи в электродинамике, привел Ю.И. Кулаков (см. [1, гл. 5]) к понятию физической структуры ранга (3,2), задаваемой следующими метрической функцией и соответствующим ей уравнением ФС

$$f=xy+z,\ f(ia)(f(jb)-f(kb))-f(ja)(f(ib)-f(kb))+f(ka)(f(ib)-f(jb))=0$$

для кортежа $\langle ijk,ab\rangle$ длины 5=3+2, причем первое множество M (с координатой x) является одномерным многообразием, а второе множество N (с координатами y, z) – двумерным многообразием.

Функциональное уравнение

$$f=f(x,y,z),\ \Phi(f(ia),f(ib),f(ja),f(jb),f(ka),f(kb))=0$$

в общем определении физической структуры ранга (3,2) было решено автором (см. [2, § 3, § 4, § 5]). Соответствующая функциональная матрица размера 7×6 должна иметь ранг меньше шести. Обращая в ноль один из её якобианов шестого порядка и фиксируя в нем точки j, k из M, b из N, получаем дифференциальное уравнение в частных производных для метрической функции $f = f(x,y,z)$. С его решением возвращаемся в исходную функциональную матрицу, обращая в ноль другой ее якобиан шестого порядка. При этом появляются классические функциональные уравнения, решением которых было установлено, что физическая структура ранга (3,2), появившаяся при анализе строения закона Ома, единственна с точностью до замены координат точек в многообразиях M, N и масштабного преобразования метрической функции f при условии ее невырожденности.

Аналогично на m-мерном и n-мерном многообразиях M и N определяются физические структуры ранга $(n+1, m+1)$:

$$f=f(x^1 \ldots x^m, y^1 \ldots y^n),$$

$$\Phi(f(ia), f(ib), \ldots, f(ic), f(ja), f(jb), \ldots, f(jc), \ldots, f(ka), f(kb), \ldots, f(kc))=0$$

для кортежа $<ij\ldots k, ab\ldots c>$ длины $(n+1)+(m+1)$.

Описанный выше метод исследования физических структур минимальных рангов (2,2) и (3,2) при переходе к физическим структурам более высокого ранга (n+1, m+1) стал неэффективным из-за многочисленных чисто технических трудностей. Более эффективным оказался разработанный автором «метод расщепления» (см. [3, § 2–§ 9]), суть которого поясним на примере простейшей физической структуры ранга (2,2). Уравнение ФС из ее общего определения разрешим относительно первой переменной $f(ia)$ и запишем его для четверок $<gi, ab>$, $<gj, ab>$ с произвольной точкой g из M. Приравнивая правые части и фиксируя независимую переменную $f(gb)$, в уравнении ФС расщепляем точки i и j из M. Используя произвольную точку d из N, точно так же в уравнении ФС расщепляем точки a и b из N.

Следствием полученных двух частных расщеплений является полное расщепление всех четырех точек i, j и a, b, по которому находим аддитивное координатное представление метрической функции f и соответствующее ей уравнение ФС:

$$f=x+y, \; f(ia)-f(ib)-f(ja)+f(jb)=0.$$

Простые экспоненциальные замены координат $exp\, x \to x$, $exp\, y \to y$ в одномерных многообразиях M, N и соответствующее им экспоненциальное масштабное преобразование $exp\, f \to f$ метрической функции f приводят полученное аддитивное задание физической структуры ранга (2,2) к канонической мультипликативной форме $f=xy$, найденной из анализа строения второго закона Ньютона.

Описанным только что методом была построена полная классификация физических структур произвольного ранга $(n+1, m+1)$ для любых значений целых чисел $m \geq 1$ и $n \geq 1$.

Из доказанной в монографии [3] основной классификационной теоремы следует, что физические структуры ранга $(n+1, m+1)$ могут существовать в следующих случаях, для которых запишем только канонические формы их метрических функций:

1. для $m=n=1$, то есть ранга (2,2):

$$f = x^1 + y^1;$$

2. для $m=n \geq 2$, то есть рангов (3,3), (4,4), (5,5) и т.д., причем в двух различных вариантах:

$$f = x^1y^1 + \ldots + x^{m-1}y^{m-1} + x^m + y^m$$

и

$$f = x^1y^1 + \ldots + x^{m-1}y^{m-1} + x^m y^m;$$

3. для $n=m+1 \geq 2$, то есть рангов (3,2), (4,3), (5,4) и т.д.:

$$f = x^1y^1 + \ldots + x^m y^m + y^{m+1};$$

4. для $m=n+1 \geq 2$, то есть рангов (2,3), (3,4), (4,5) и т.д.:

$$f = x^1y^1 + \ldots + x^{m-1}y^{m-1} + x^m;$$

5. для $n=m+2=3$, то есть ранга (4,2):

$$f = (x^1y^1 + y^2) / (x^1 + y^3);$$

6. для $m=n+2=3$, то есть ранга (2,4):

$$f = (x^1y^1 + x^2) / (x^3 + y^1).$$

Для всех же остальных пар значений целых чисел m и n физические структуры ранга (n+1, m+1) не существуют (см. [3, §1]).

Заметим, что диагональные комплексифицированные физические структуры рангов (3,3), (4,4), (5,5) и (6,6) были использованы в теоретической физике Ю.С. Владимировым [4] для обоснования сигнатуры псевдоевклидового пространства-времени Минковского, а также для построения спинорного аппарата описания ферми-частиц и создания единой теории взаимодействий.

Феноменологическая симметрия характеризует не только физические структуры как геометрии двух множеств [2], но и обычные геометрии на одном множестве, например, плоскость Евклида E^2 (см. [5], Введение). В качестве задающей ее метрической функции можно взять квадрат обычного расстояния между двумя точками i и j из E^2. Соответствующее ей уравнение ФС имеет следующий геометрический смысл: трехмерный объем тетраэдра <$ijkl$>, выраженный через шесть взаимных расстояний между четырьмя его вершинами, равен нулю, если все они лежат в плоскости Евклида:

$$f(ij)=(x(i)-x(j))^2+((y(i)-y(j))^2,$$

$$V(f(ij), f(ik), f(il), f(jk), f(jl), f(kl))=0.$$

Преобразование плоскости Евклида $(x, y) \to (x', y')$, сохраняющее ее метрическую функцию, называется движением. Множество всех движений находится как решение функционального уравнения

$$(x'(i)-x'(j))^2+(y'(i)-y'(j))^2 = (x(i)-x(j))^2+(y(i)-y(j))^2$$

из условия сохранения метрической функции и является трехпараметрической группой (см. [5, §10]), включающей в себя покой и обратное движение. Таким образом, плоскость Евклида наделена групповой симметрией степени три, то есть является двумерной геометрией с максимальной подвижностью.

Аналогичные свойства характеризуют и некоторые другие двумерные геометрии, в частности сферу S^2 в трехмерном евклидовом пространстве.

Естественно, возникает вопрос, сколько таких геометрий, определяемых в общем случае метрической функцией $f(ij)$ и соответствующим ей уравнением ФС:

$$f(ij)=f(x(i), y(i), x(j), y(j)),$$
$$\Phi(f(ij), f(ik), \mathrm{f}(il), f(jk), f(jl), f(kl))=0$$

для четверки $<ijkl>$, на двумерном многообразии M может быть?

Автором была построена полная классификация двумерных феноменологически симметричных геометрий, которые наделены групповой симметрией степени три. Метрические функции $f(ij)$ приведены в ней с точностью до замены координат точек в двумерном многообразии и ее масштабного преобразования (см. [5, § 3]).

Заметим, что В.Х. Львом построена полная классификация трехмерных феноменологически симметричных геометрий (см. [5, § 4]), которые наделены групповой симметрией степени шесть. То есть такие трехмерные геометрии, как и двумерные, являются геометриями с максимальной подвижностью. Полные классификации n-мерных феноменологически симметричных геометрий, которые наделены групповой симметрией степени $n(n+1)/2$, для $n \geq 4$ еще не построены.

Г. Гельмгольц в известной его работе «О фактах, лежащих в основании геометрии» [6] нашел все двумерные геометрии с максимальной подвижностью, равной трем. Среди них, конечно же, были плоскость Евклида E^2 и двумерная сфера S^2, но была еще и такая геометрия, в которой окружностью является логарифмическая спираль. Эту «странную» геометрию Гельмгольц из своей классификации исключил дополнительной аксиомой, согласно которой поворот на 360 градусов не должен изменять расположения фигур. Аналогично Гельмгольц исключил и псевдоевклидовую плоскость Минковского, то есть двумерное пространство-время специальной теории относительности (СТО), которую спустя почти 40 лет, в 1905 г., создал А. Эйнштейн.

Но, с другой стороны, все двумерные геометрии с максимальной подвижностью, найденные Гельмгольцем, в том числе и «странные» с его точки зрения, присутствуют в полной классификации двумерных феноменологически симметричных геометрий (см. [5, § 3]).

Детальный анализ совпадения двух классификаций убедил автора в том, что для двумерных геометрий между их групповой и феноменологической симметриями имеется тесная связь. Впоследствии было установлено (см. [5, § 6]), что эта связь является полной эквивалентностью в следующем смысле: для того чтобы метрическая функция $f(ij)$ задавала феноменологически симметричную двумерную геометрию, необходимо и достаточно, чтобы эта геометрия была наделена групповой симметрией степени три, то есть была двумерной геометрией с максимальной подвижностью.

С установлением эквивалентности феноменологической и групповой симметрий двумерных геометрий оказалось возможным проверить полноту их классификации, используя теорию групп преобразований, созданную С. Ли [7] и его последователями.

Соответствующая проверка была проведена автором (см. [5, § 7, § 8]). Метрические функции $f(ij)$ из общего определения находились при этом как невырожденные двухточечные инварианты их групп движений.

Далее было установлено, что эквивалентность феноменологической и групповой симметрий имеет место для геометрий любой размерности $n \geq 1$ и даже для так называемых полиметрических геометрий, в которых паре точек сопоставляется не одно число, а несколько (см. [8, § 1, § 2]), причем во всех случаях феноменологически симметричные геометрии оказывались геометриями с максимальной подвижностью.

В результате появилась возможность групповыми методами построить полные классификации некоторых полиметрических геометрий, в частности, двуметрических геометрий на плоскости и триметрических геометрий в пространстве (см. [8, § 3, § 4, § 5]).

Одна из двуметрических двумерных геометрий задается следующей двухкомпонентной метрической функцией:

$$f^1(ij)=(x(i)-x(j))y(i), f^2(ij)=(x(i)-x(j))y(j).$$

Эта геометрия имеет содержательную физическую интерпретацию (см. [5, § 16]). Для такой интерпретации под $f^1(ij)$ и $f^2(ij)$ надо понимать те количества тепла $Q^{TS}(ij)$ и $Q^{ST}(ij)$, которые система отдает внешним телам при ее переходе из начального состояния i в конечное состояние j по двум различным путям. А именно по траекториям TS и ST, состоящим из равновесных изотермического ($T=const$) и адиабатического ($S=const$) процессов, где $S=x$ и $T=y$ есть энтропия и температура как естественные параметры такой плоскости.

Установление эквивалентности феноменологической и групповой симметрий в геометрии одного множества поставило вопрос о существовании аналогичной эквивалентности этих симметрий и в геометрии двух множеств, то есть для физических структур.

Проанализируем в этом отношении физическую структуру ранга (3,2), появившуюся при анализе строения закона Ома. Движением в этой геометрии двух множеств назовем такие одновременные преобразования $x \to x'$ одномерного многообразия M и $(y, z) \to (y', z')$ двумерного многообразия N, которые сохраняют метрическую функцию $f=xy+z$. Каждое движение является решением соответствующего функционального уравнения

$$x'y'+z' = xy+z$$

из условия сохранения метрической функции (см. [2, § 5]). Множество всех движений представляет собой двухпараметрическую группу согласованных преобразований обоих многообразий. Метрическая функция f является ее двухточечным инвариантом, единственным с точностью до масштабного преобразования, что устанавливается решением другого функционального уравнения [Там же].

Следовательно, физическая структура ранга (3,2) как феноменологически симметричная геометрия двух множеств наделена групповой симметрией степени два и является геометрией с максимальной подвижностью.

Проведенный анализ устанавливает эквивалентность феноменологической и групповой симметрий физической структуры ранга (3,2). Но такая же эквивалентность имеет место и для физических структур любого ранга, причем не только однометрических, но и полиметрических (см. [9, § 1]).

Для вышеопределенных однометрических физических структур ранга (n+1, m+1) группы движений были найдены как решения соответствующих функциональных уравнений из условия сохранения их метрических функций (см. [9, § 2]). Оказалось, что для каждой из них степень групповой симметрии равна произведению mn размерностей m и n многообразий M и N, то есть они, как и физическая структура ранга (3,2), являются геометриями двух множеств с максимальной подвижностью.

Эквивалентность феноменологической и групповой симметрий для полиметрических физических структур позволила построить полные классификации некоторых из них, используя теорию группы Ли преобразований (см. [9, § 7, § 8]).

Заметим, что большая часть задач теории физических структур сводится к решению функциональных уравнений. Методы их решения в совокупности и составляют ее математический аппарат. Обзор типов возникающих функциональных уравнений приведен в монографиях автора (см. [8, § 7; 9, § 11; 10, § 6, § 12]). Некоторые из них еще не решены. Список решенных и нерешенных задач приведен в тех же монографиях (см. [8. С. 112; 9. С. 190; 10, § 7, § 14]). Читатель может подключиться к решению любой из них, освоив уже наработанные методы или предложив свой более эффективный метод.

В заключение отметим одно очень важное обстоятельство. Богатое математическое содержание и разнообразную физическую интерпретацию имеют только бинарные физические структуры, метрические функции которых сопоставляют числа паре точек <*ij*> из одного множества M или паре точек <*ia*> из двух разных множеств M и N. То есть они являются геометриями одного или двух множеств. Наделенные групповой симметрией, они являются геометриями с максимальной подвижностью, причем феноменологическая и групповая симметрии для них оказываются эквивалентными.

Понятие физической структуры можно обобщить, предполагая, что метрическая функция f сопоставляет числа не только двум точкам из одного множества или двух разных множеств, но и трем точкам, четырем и т.д. (см. [9, § 10; 10, § 11]). Тогда физические структуры могут быть определены более чем на трех множествах. Однако предварительное исследование показало, что, во-первых, небинарные физические структуры не наделяются групповой симметрией конечной степени. Во-вторых, они существуют в простейших формах только для минимальных рангов. Например, на трех множествах M, N, L физическая структура ранга (2,2,2) существует, а уже для ранга (3,2,2) она существовать не может. Если же дополнительно потребовать, чтобы физические структуры были наделены групповой симметрией конечной степени, то, оказывается, остаются только бинарные физические структуры на одном и двух множествах. И для них автоматически сами собой устанавливаются точные соотношения между рангом феноменологической симметрии, степенью групповой симметрии, размерностью множеств и числом компонент метрической функции. Все эти соотношения обычно вводились в определения физических структур без достаточного обоснования, но теперь стало ясно (см. [9, § 10; 10, § 11]), что они являются следствием наличия групповой симметрии, без которой, как известно, становится бедным физическое содержание любых математических построений.

P.S.: Монография Кулакова Ю.И. и все цитируемые в данном обзоре монографии автора размещены на сайте теории физических структур, электронный адрес: http://www.tphs.info

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кулаков Ю.И.* Теория физических структур. – М.: Доминико, 2004.
2. *Михайличенко Г.Г.* Физические структуры как геометрии двух множеств. – Горно-Алтайск: ГАГУ, 2008.
3. *Михайличенко Г.Г.* Математический аппарат теории физических структур. – Горно-Алтайск: ГАГУ, 1997.
4. *Владимиров Ю.С.* Основания физики. – М.: Бином, 2008.
5. *Михайличенко Г.Г.* Двумерные геометрии. – Барнаул: БГПУ, Горно-Алтайск: ГАГУ, 2004.
6. *Гельмгольц Г.* О фактах, лежащих в основании геометрии // Об основаниях геометрии. – М., 1956. – С. 366–388.
7. *Lie S., Engel F.* Theorie der Transformations gruppen, Bd 3. – Leipzig, 1893.
8. *Михайличенко Г.Г.* Полиметрические геометрии. – Новосибирск: НГУ, 2001.
9. *Михайличенко Г.Г.* Групповая симметрия физических структур. – Барнаул: БГПУ, Горно-Алтайск: ГАГУ, 2003.
10. *Михайличенко Г.Г.* Математические основы и результаты теории физических структур. – Горно-Алтайск, ГАГУ, 2012.

FORMATION AND DEVELOPMENT OF THE MATHEMATICAL APPARATUS OF THE THEORY OF PHYSICAL STRUCTURES

G.G. Mikhailichenko

The theory of physical structures was proposed by Yuri Kulakov in the early 1960s. In studying the simplest structure of rank (2,2), its author relied only on the well-known analysis theorem about functional dependency. However, as the theory grew more complex and in view of the need for complete classifications of physical structures, it became essential to use many other branches of higher mathematics, in particular, the theory of Lie groups of transformations, and develop special research methods. This article offers a historical overview of the development of the mathematical apparatus of the theory of physical structures over the fifty years that have passed from its inception to the present day.

Key words: physical structure, phenomenological symmetry (PS), group symmetry (GS), equivalence of PS and GS, classification of physical structures.

МЕТАМАТЕМАТИКА И ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

АНРИ ПУАНКАРЕ И ДРУГИЕ ЕСТЕСТВОИСПЫТАТЕЛИ*

В.И. Арнольд

В 1970 г. я задумал издать по-русски избранные работы крупнейшего математика предыдущего столетия, Анри Пуанкаре. Свое предложение я направил в редакцию «Классики науки» Российской Академии Наук. Через месяц я получил ответ, подписанный главным редактором серии, академиком Анатолием Алексеевичем Логуновым.

В ответе объяснялось, что «в 1909 году Владимир Ильич Ленин опубликовал книгу “Материализм и эмпириокритицизм”, не оставлявшую камня на камне в идеалистической теории махиста Пуанкаре, а потому издание сочинений Пуанкаре в нашей стране невозможно».

С этим ответом я пришел на заседание кафедры дифференциальных уравнений МГУ, где я тогда работал. Заведовавшая кафедрой Ольга Арсеньевна Олейник сразу заметила мою грусть, и я показал ей письмо Логунова…

Прочитав письмо, Ольга Арсеньевна стала меня утешать: «Не все потеряно!» Во-первых, она предложила послать новое предложение уже не от меня, а от нас обоих вместе. Во-вторых, она посоветовала обратиться за помощью к Николаю Николаевичу Боголюбову. А именно она сказала, что он обладает следующими тремя качествами. Во-первых, он очень высоко ценит Пуанкаре, работы которого по теории усреднений Боголюбов продолжил.

Во-вторых, Николай Николаевич высоко ценит Владимира Игоревича Арнольда, у которого он был оппонентом докторской диссертации. Более того, Боголюбов опубликовал целую книжку, где он решает свои задачи заимствованными из диссертации Арнольда методами. А. Пуанкаре построил

* Текст печатается по имеющейся в распоряжении Редакции рукописи с сохранением авторской орфографии.

теорию усреднения для гамильтоновых систем (занимаясь небесной механикой планетных систем). Он заметил, что предшествовавшая теория Линдштедта (опубликованная, кстати, Российской Академией Наук) в применении к гамильтоновым системам приобретает своеобразные особенности (сегодня вкладываемые в симплектическую геометрию и симплектическую топологию – эти две новые науки были изобретены Пуанкаре именно при переработке негамильтоновой теории Линдштедта и ее приспособлении к гамильтоновым системам).

Н.Н. Боголюбов обобщил теорию усреднения гамильтоновых систем, построенную Пуанкаре, так что она распространилась и на негамильтоновы системы: о предшествовавших Пуанкаре работах Линдштедта на эту тему он не знал.

В-третьих, Анатолий Алексеевич Логунов – ученик Николая Николаевича Боголюбова.

Итак, я позвонил Николаю Николаевичу, и он тут же пригласил меня к себе домой (а жил он в профессорской башне главного здания МГУ).

Вот что сказал мне Николай Николаевич: «Прежде всего, у нас троих – Пуанкаре, Боголюбова и Арнольда – следующие общие черты. По образованию мы математики, по работам – физики, но на самом деле все трое являются даже <u>естествоиспытателями</u>».

Затем Николай Николаевич объяснил мне, чем отличается подход естествоиспытателя к неприятным и даже грозным явлениям природы, вроде извержений Везувия, от подхода к ним остальных людей. Конечно, гибель жертв огорчает всех, но естествоиспытатель кроме огорчения думает еще и о том, как бы использовать неприятные явления природы вроде землетрясения или извержения для получения новых научных результатов (например, для измерения каких-либо параметров структуры магмы или даже земного ядра).

После этого Н.Н. пояснил, что сейчас «речь будет идти не об извержениях, а о другом, тоже весьма неприятном, но нередким явлении: антисемитизме, существующем и на всей планете, и в нашей стране, и в Москве и даже в Академии наук (в частности, в виде антиэйнштейнианства)».

Закончив это свое введение, Николай Николаевич достал бланк со всеми своими титулами: директор Объединенного института ядерных исследований в Дубне, академик-секретарь Отделения математики Российской Академии Наук, заведующий кафедрой на физическом факультете МГУ и т.п.

На этом бланке он тут же начал писать свое письмо: «Дорогой Анатолий Алексеевич, мы с Владимиром Игоревичем Арнольдом и Ольгой Арсеньевной Олейник предлагаем…» (и далее следовало мое предложение).

Но в конце его Николай Николаевич добавил новую фразу: «За 10 лет до Эйнштейна Пуанкаре открыл принцип относительности (а изложил его в 1895 году в научной статье во французском журнале). Эту работу Пуанкаре “Об Измерении Времени” мы тоже предлагаем включить в обсуждаемое собрание сочинений Пуанкаре».

Через три недели я получил от «Классиков науки» положительный ответ, а в 1972 г. выпустил три тома наиболее важных работ Пуанкаре на русском языке. Это издание является сегодня лучшим из всех имеющихся (хотя французское 11-томное издание во много раз длиннее).

Дело в том, что в нашем издании каждая работа снабжена подробным комментарием современного состояния дел в изучаемой области: что в тексте Пуанкаре верно, а что ошибочно, что и кем исправлено, и где эти исправления найти. В ряде случаев ошибки указал сам Пуанкаре, и некоторые его ошибки стали источником целых новых теорий.

Например, «гипотеза Пуанкаре» была опубликована им как «теорема» (с доказательством). Но это доказательство содержало серьезную ошибку (он спутал определенные им гомологии с гомотопиями, введенными им же).

Эта знаменитая ошибка привела к независимому развитию отдельной теории гомологий и отдельно теории гомотопий в XX в. «Теорема Пуанкаре» стала при этом гипотезой. За доказательство этой гипотезы Фильдсовский Комитет присудил медаль Фильдса 2006 г. Григорию Перельману. Так что Пуанкаре правильно предсказал результат, только для его доказательства потребовалось около ста лет (и усилия многих математиков).

Другая знаменитая ошибка Пуанкаре – его работа о задаче трех тел, награжденная премией короля Швеции Оскара II. Премия была присуждена за «доказательство невозможности представления решений сходящимися в течение бесконечного времени рядами».

Пуанкаре же доказал несуществование аналитических (в области планетных движений) первых интегралов, независимых, с классически известными интегралами (энергии, площадей и т. п.)

Ответа на вопрос Оскара II этот результат не дает, и даже сам этот ответ противоположен: сходящиеся везде ряды существуют (хотя они и не похожи на классические ряды теории возмущений, расходимость которых доказывает теория Пуанкаре).

Поэтому Пуанкаре потратил всю полученную премию на то, чтобы скупить у библиотек и подписчиков все номера журнала «Акта математика», где было опубликовано его неверное «решение» королевской проблемы, а затем чтобы разослать им исправленную версию работы (выросшей позже в знаменитую книгу «Новые методы небесной механики» А. Пуанкаре).

Замечу еще, что исходная работа Пуанкаре стала источником открытия С. Ковалевской нового случая интегрируемости задачи о вращении твердого тела. А именно Ковалевская пыталась, по совету своего учителя Вейерштрасса, доказать отсутствие таких новых случаев (подобно тому, как Пуанкаре доказывал отсутствие новых случаев интегрируемости в задаче трех тел).

Но оказалось, что метод Пуанкаре в некоторых случаях не работает: это и есть «случай Ковалевской», интегрируемость которого она открыла благодаря неудаче своей попытки доказать неинтегрируемость методом Пуанкаре.

Кроме двух описанных выше знаменитых ошибок замечательные работы Пуанкаре дают повод к большому количеству глубоких комментариев, которые и были сделаны в русском издании лучшими специалистами в соответствующих областях.

Сейчас ссылки на состояние этих областей в печатающихся во всем мире статьях чаще всего делаются именно на русское комментированное издание, как на наиболее авторитетный источник.

Что касается теории относительности, то Логунов, опровергая Эйнштейна, опубликовал свою версию этой теории (которая как раз вовсе не обсуждается в комментариях русского издания Пуанкаре).

Обстояло же дело следующим образом. Пуанкаре обратил внимание на то, что «абсолютное пространство и абсолютное время» механики Галилея и Ньютона не имеет рационального физического определения, пока не указан способ синхронизации удаленных часов.

Если же способ синхронизации указан, то получающиеся «законы природы» оказываются свойствами не самих явлений природы, а выбранной системы отсчета. Пуанкаре пришел, таким образом, к выводу, что все настоящие законы природы нужно формулировать так, чтобы эти законы не зависели от специальных свойств систем отсчета (не зависели от способа синхронизации удаленных событий).

Пуанкаре писал свою статью для философского журнала, поэтому он избегал в ней математических формул и доказательств (приведя лишь совершенно нетривиальную открытую им формулу $E = mc^2$ в качестве примера дальнейших результатов своей теории).

Когда Эйнштейн, 10 лет спустя, начал заниматься этими вопросами в ETH (Политехникуме Цюриха), то его учитель Минковский, друг Пуанкаре, сразу же посоветовал Эйнштейну разобрать работы Пуанкаре, что тот и сделал.

Но он почему-то ничего не писал об этом до 1945 г., когда, наконец, сослался на своего предшественника (почти в той же форме, в которой это сделано выше).

Напротив, Пуанкаре всегда ссылался на Эйнштейна и всегда давал вполне положительные отзывы на все его работы, никогда не упоминая о своих (предшествовавших) достижениях.

В письмах Пуанкаре объяснял это друзьям так, что способную молодежь обязательно нужно всесторонне поддерживать. На фотографиях Сольвеевских конгрессов Пуанкаре и Эйнштейн дружески беседуют, но Пуанкаре умер в 1912 году, не дожив до всеобщего признания теории Эйнштейна, правильно предсказавшей наблюдавшееся во время затмения в 1919 г. отклонение лучей света Солнцем.

Между прочим кроме принципа относительности Пуанкаре принадлежит еще одно важнейшее релятивистское открытие: «преобразования Лоренца». Именно Лоренц задался вопросом о симметриях системы уравнений электродинамики Максвелла. Он нашел такие преобразования пространства-времени и опубликовал их в своей статье.

Пуанкаре, читавший в Сорбонне курс лекций по электродинамике, захотел рассказать студентам об этом открытии Лоренца. Симметрии должны образовывать группу. Перемножая два указанных Лоренцом преобразования, Пуанкаре получил, однако, нечто совсем другое. Так как этого не может быть ни для какой пары симметрий, то Пуанкаре перешел в следующей лекции в Сорбонне к инфинитезимальным симметриям, то есть от группы Ли к ее алгебре Ли. В этом случае скобка Пуассона пары инфинитезимальных симметрий должна снова быть инфинитезимальной симметрией. А для «симметрий» Лоренца дело обстоит иначе.

Удивленный Пуанкаре проверил на еще одной функции, что указанные Лоренцом замены координат сохраняют систему уравнений Максвелла. Но и это оказалось неверным (даже для бесконечно-малых изменений системы координат).

К следующей лекции Пуанкаре самостоятельно вычислил группу симметрий, не заботясь более о связи с формулами Лоренца. Найденные им симметрии поддерживали все проверки: он правильно нашел и группу Ли, и ее алгебру – Ли.

По правилам французского университета, лекции должны были публиковаться. Подготавливая свои лекции по электродинамике к печати, Пуанкаре дошел до симметрий системы уравнений Максвелла и описал найденные им ответы.

Но ему нужно было как-то назвать эти преобразования, и он выбрал для них имя «преобразования Лоренца» (хотя Лоренц их и не нашел).

Разумеется, Пуанкаре высоко ценил Лоренца и правильно считал важной поставленную Лоренцем задачу отыскания группы симметрий системы уравнений Максвелла.

Н.Н. Колмогоров говорил, что свое предпочтение к изобретению новых задач (по отношению к решению старых) он не рассматривает как свой недостаток, но, скорее, как нечастое достоинство.

Я даже использовал опыт Пуанкаре, назвав в своих отзывах на диссертации Маслова и Гудкова «индексом Маслова» и «гипотезой Гудкова» изобретенные мною при продумывании этих диссертаций объекты.

И Маслов, и Гудков вначале возражали мне. Маслов считал, что введенный мною «индекс Маслова» «ненужное обобщение» (рассматривавшегося им остатка от деления этого целого числа на 4). Гудков же предлагал контрпримеры (оказавшиеся ошибочными) к названной мною его именем гипотезе (объединявшей сотни специальных теорем его диссертации).

Возвращаясь к изданию русского собрания сочинений Пуанкаре, подчеркну еще раз, что изобретенное Н.Н. Боголюбовым использование антисемитизма и антиэйнштейнианства отдельных лиц для развития науки оказалось чрезвычайно успешным: трехтомник Пуанкаре получил массу приложений и в топологии, и в алгебраической геометрии, и в теории дифференциальных уравнений, и в симплектической геометрии и симплектической топологии, и в небесной механике, и в астрономии космических полетов, и в теории гомотопий, гомологий и когомологий, и в теории характеристических классов и характеристических чисел (включая «топологические заряды» квантовой теории поля).

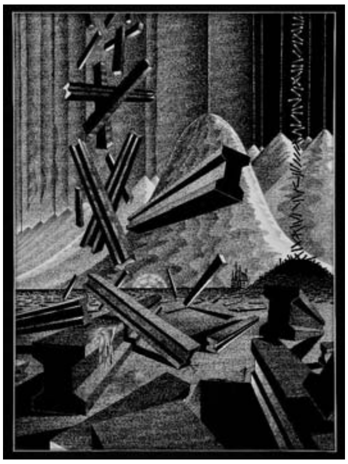
Причем в руках Пуанкаре даже самые абстрактные математические теории выступают как главы естествознания, а неразделимое переплетение математических и физических идей и методов еще раз подчеркивает глубокое единство всех многообразных частей нашей науки, от теории чисел и криптографии до гидродинамики и геометрии многообразий или теории хаотических динамических систем, также основанной Пуанкаре.

HENRI POINCARÉ AND OTHER NATURAL SCIENTISTS*

V.I. Arnold

* The text is printed according to the manuscript that the Editorial Board has at its disposal, retaining the author's spelling.

ЭЙНШТЕЙН И МАТЕМАТИКИ (К 100-ЛЕТИЮ СОЗДАНИЯ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ)



Вл.П. Визгин

Институт истории естествознания и техники РАН

В статье, посвященной столетию создания общей теории относительности, рассматривается история разработки теории от принципа эквивалентности (1907 г.) до получения правильных, общековариантных уравнений гравитации в ноябре 1915 г. Особое внимание уделяется математике и математикам (Г. Минковскому, М. Гроссману, Д. Гильберту), сыгравшим значительную роль в этой истории. Показано, что, несмотря на это, решающий вклад в создание теории внес «физик до мозга ногтей» А. Эйнштейн, но не сам по себе, а в процессе «сильного взаимодействия» с упомянутыми математиками. Отмечается также, что с начала 1920-х гг. Эйнштейн становится лидером геометрической полевой программы синтеза физики, инициированной, прежде всего, геттингенскими математиками. При этом он присоединился к ним, полагая, что «настоящее творческое начало присуще именно математике».

Ключевые слова: история теории относительности, общая теория относительности, тензорно-геометрическая концепция гравитации, риманова геометрия, общековариантные уравнения гравитационного поля, геометрическая полевая программа, взаимосвязь физики и математики, А. Эйнштейн, Г. Минковский, М. Гроссман, Д. Гильберт, Г. Вейль.

> Люди, подобные Эйнштейну и Нильсу Бору,
> Во тьме прокладывали путь к своим концепциям – общей теории относительности и теории строения атома, – руководствуясь опытом и воображением, отличным от тех, которыми пользуются математики, хотя математика, несомненно, и для них играет важную роль.
>
> *Г. Вейль* [1. С. 254–255]

> …Das eine ist sicher, das ich mic him Leben noch hicht *annähernd so geplagt habe, und dass* ich grosse Hochachtung *für* die Mathematic eingeflösst bekommen habe, die ich bis jetzt in ihren subtileren Teilen in meiner Einfalt *für* paren Luxus ansah! Geden dies

Problem ist die urspr $\ddot{u}ngliche$ Relativit$\ddot{a}$tstheorie eine Kinderei[1]

А. Эйнштейн [2. P. 505]

…Исследователи, работающие на разных поприщах, и в частности физики, не имеют времени, а нередко также и случая убедиться, не находятся ли уже готовыми в кладовых чистой математики те логические орудия, в которых они нуждаются – что между прочим влечет за собой известную свежесть в их мыслях. Наступающие впоследствии соглашения с профессиональными математиками – представляющееся мне весьма важным делом, так как благодаря ему мысли приобретают более точный характер и открываются всякого рода связи – предполагает прежде всего перевод употребляемых там и сям способов выражения на другой язык.

[3. С. 153–154)]

Введение

В конце ноября 2015 г. исполняется 100 лет со времени завершения основ общей теории относительности (ОТО). Именно тогда А. Эйнштейном и параллельно математиком Д. Гильбертом были получены правильные общековариантные уравнения гравитационного поля, составляющие квинтэссенцию ОТО, которая в сущности является релятивистской теорией гравитации. Но Гильберт, патриарх Геттингена, – не единственный математик, который внес существенный вклад в создание ОТО и последующее ее развитие в героические начальные годы (до 1915 г. и после 1915 г. – в дальнейшие 5–7 лет).

Выделим, прежде всего, первую главную тройку-пятерку математиков-«релятивистов». Это А. Пуанкаре и Г. Минковский, разработавшие четырехмерную математическую формулировку специальной теории относительности, ставшую важной предпосылкой при построении ОТО. Далее, это М. Гроссман, друг и коллега А. Эйнштейна по Цюрихскому политехническому институту, специалист по геометрии, соавтор Эйнштейна, который помог ему освоить риманову геометрию. И, наконец, это Гильберт, который получил правильные уравнения гравитации примерно тогда же, когда и Эйнштейн, но несколько иным путем. Может быть, к этой четверке стоит добавить еще одного патриарха Геттингена Ф. Клейна, который связал кон-

[1] «...Одно точно: никогда в жизни я так не мучился, и теперь мне внушает большое уважение математика, тонкости которой раньше я по своей ограниченности считал роскошью. По сравнению с этой проблемой первоначальная теория относительности является просто детской игрушкой» (Из переписки Зоммерфельда с Эйнштейном // Зоммерфельд А. Пути познания в физике. М.: Наука, 1973. С. 191).

цепцию Минковского со своей «Эрлангенской программой» 1872 г. и затем внес определенный вклад в понимание принципиальных проблем ОТО.

Дальнейшее развитие ОТО было связано с двумя направлениями. Первое – это геометрическая полевая программа синтеза физики, нацеленная на простроение единой теории гравитационного и электромагнитного полей. Второе – это применение ОТО в космологии. Первому направлению Эйнштейн отдал более 30 лет жизни, но решающего успеха не достиг. Второе направление, порожденное эйнштейновской работой 1917 г., было более успешным и даже триумфальным – оно привело к современной релятивистской космологии, подтвержденной значительным наблюдательным материалом. Но у истоков первого направления стояли тоже математики: сам Гильберт и его ученик Г.Вейль, а также математик Т. Калуца. Общая идея единой теории гравитации и электромагнетизма принадлежала Гильберту, а Вейль и Калуца выдвинули два главных варианта такой теории, которые легли в основу геометрической полевой программы (четырехмерное обобщение римановой геометрии и пятимерная риманова геометрия).

Что касается второго направления, а именно космологии, то ее основной вариант, который получил значительное развитие и наблюдательное подтверждение, именно нестационарная модель, был развит советским математиком и механиком А.А. Фридманом. Наконец, пророками идеи геометризации физического взаимодействия были также математики; в умеренном варианте великий Б. Риман, а в радикальном варианте английский математик У. Клиффорд.

Ниже мы более подробно рассмотрим эту несколько необычную особенность теории относительности и ее формирования. Но начнем со связанного с этой особенностью теории некоего мифа, с которым мне приходилось встречаться и который при поверхностном рассмотрении истории создания и развития ОТО как бы напрашивается: решающий вклад в создание и развитие этой теории внесли математики, а вовсе не физик Эйнштейн. После этого мы попытаемся более реалистически оценить меру вклада в ОТО математиков и физиков, прежде всего Эйнштейна.

Схема мифа о «математическом происхождении» ОТО

Согласно Э. Уиттекеру, тоже в первую очередь математику, который написал двухтомную книгу по истории физики XIX–XX вв., СТО была создана прежде всего А. Пуанкаре, который, кстати говоря, первым ввел четырехмерное представление теории [4]. Следующий шаг на этом пути сделал математик Г. Минковский, который положил это представление в основу СТО и развил четырехмерное тензорное исчисление и понятие четырехмерного пространства-времени как физической реальности.

Эйнштейн, недооценивавший математику и недостаточно серьезно ее изучавший в Цюрихском политехе (а одним из его преподавателей как раз был Минковский), поначалу отнесся к четырехмерию (или четырехмирию) без особого интереса, решив, что к физике прямого отношения оно не имеет (см. [5, 6]).

Когда Эйнштейн занялся построением релятивистской теории тяготения (1907–1912), он в течение почти пяти лет мучился с распространением физического принципа эквивалентности на произвольные поля, действуя как физик. Но только перейдя на математические рельсы и прибегнув к помощи студенческого друга математика М. Гроссмана, он сдвинулся с мертвой точки. При этом ключевой идеей было взятие за основу четырехмерного метрического подхода Минковского. Итак, Минковский плюс Гроссман привели к созданию тензорно-геометрической концепции гравитации – основы ОТО. Основной тензор кривизны, фигурирующий в уравнениях гравитации, именно тензор Риччи R_{ik}, появился в той части совместной статьи Эйнштейна и Гроссмана, которая была написана последним [7]. Математика вела к правильному выбору, но физические соображения, конечно, принадлежащие физику Эйнштейну, помешали решиться на этот выбор. На заключительной стадии Д. Гильберт, включившийся в разработку тензорно-геометрической теории Эйнштейна–Гроссмана почти одновременно с Эйнштейном (и даже на пять дней раньше его!) нашел правильные уравнения гравитации (см. [8–10]).

В результате путь, ведущий от СТО к ОТО, выглядит так: адекватная формулировка СТО, нужная для перехода к ОТО, принадлежит Пуанкаре, Минковскому и отчасти Клейну; следующий шаг был бы невозможен без Гроссмана, которому принадлежит идея построения уравнений гравитации с помощью тензора Риччи (и, значит, его вклад в формирование тензорно-геометрической концепции гравитации определяющий); наконец, Гильберт выводит правильные общековариантные уравнения гравитации, найдя впервые нужное выражение для лагранжиана гравитационного поля. В цепочке исследователей, внесших решающий вклад в разработку ОТО, – Пуанкаре, Минковский, Гроссман, Гильберт – мы не находим Эйнштейна! Его, конечно, можно включить, но, в общем-то, можно обойтись и без него. И эта цепочка состоит из выдающихся математиков, хотя Гроссмана к таковым обычно не относят.

Уместно теперь продлить эту цепочку в прошлое (найти пророков геометризации физики) и в будущее (назвать тех, кто принял в дальнейшем активное участие в развитии ОТО).

Пророки хорошо известны – это как минимум математики Б. Риман и У. Клиффорд [10, 11]. Первый заложил основы многомерной римановой геометрии и в своей провидческой работе 1854 г. отметил, что метрика пространства может определяться внешними (физическими) факторами. Второй предположил в 1870 г., что вещество и физические взаимодействия можно истолковать как проявление кривизны пространства. Таким образом, одни корифеи математики предвидели то, что реализовали другие.

Но вот теория создана. Не вполне понятно, правда, почему она называется теорией Эйнштейна. Возможно, потому, что итоговая, обобщающая работа «Основы общей теории относительности» (1916) была написана именно им. И два главных направления развития этой теории – космология и геометрическая полевая программа синтеза физики – получают решающее развитие также, прежде всего, в трудах математиков. Правда, Эйнштейн первым применяет ОТО к космологии (1917 г.), но его стационарная модель вскоре признается ошибочной. К концу 1920-х гг. верх берет нестационарная модель («расширяющаяся Вселенная»), выдвинутая советским математиком и механиком А.А. Фридманом в 1922 г. и поддержанная затем Ж. Леметром и наблюдениями американского астронома Э. Хаббла [9, 10].

Другое направление, которое с начала 1920-х гг. и до конца жизни упорно разрабатывал Эйнштейн и которое именуется геометрической полевой программой синтеза физики, также было инициировано математиками: самим Гильбертом, его выдающимся учеником Г. Вейлем и почти неизвестным никому немецким математиком Т. Калуцей (см. [14]). Кстати говоря, Гильберт получил уравнения гравитации в рамках своей единой теории гравитации и электромагнетизма, в которой уравнения электромагнитного поля рассматривались как следствие уравнений гравитации. Этот вариант объединения полей оказался вырожденным и в дальнейшем не использовался. Зато два других варианта единой теории, принадлежащие Вейлю (1918) и Калуце (1921), соответственно обобщение четырехмерной римановой геометрии на пространства аффинной связности и пятимерное обобщение римановой геометрии, стали базовыми для эйнштейновской программы. Причем сначала Эйнштейн весьма критично отнесся ко всем трем вариантам единой теории поля, но затем стал лидером всей программы, поочередно увлекаясь то неримановыми обобщениями, то римановым пятимерием.

Эта программа так и не привела к успеху, несмотря на то, что время от времени к ней подключались такие математики, как Э. Картан, Т. Леви-Чивита, Я. Схоутен и др., и на то, что Эйнштейну в расчетах нередко помогали его более молодые математические соавторы (В. Баргман, П. Бергман, Я. Громмер, Б. Кауфман, В. Майер, Э. Страус и др.). Таким образом, математики совратили Эйнштейна, сбили его на ошибочный путь; в каком-то смысле он изменил своему, физическому способу мышления, который привел его к СТО, принципу эквивалентности, важным результатам в области квантовой теории. Но саму эту геометрическую программу математики и предвидели, и фактически выдвинули.

Из этой картины событий можно было бы сделать некоторые негативные выводы, касающиеся ОТО и вклада Эйнштейна в ее построение. С одной стороны, хотя Эйнштейн и занимался этой теорией, основной вклад в ее формирование внесли математики. Подобно тому, как СТО следовало бы именовать теорией Пуанкаре–Минковского, ОТО нужно называть не теорией Эйнштейна, а теорией Гроссмана–Гильберта. С другой стороны, ОТО как физическая теория имеет в известном смысле вырожденный характер: математика в ней явно гипертрофирована, а экспериментально-эмпирическая сторона выражена крайне слабо. При этом обращается внимание на то, что

Нобелевской премией Эйнштейн был удостоен не за теорию относительности, а за вклад в квантовую теорию. Это можно толковать двояко: либо эти теории не имели достаточного экспериментального подтверждения (особенно ОТО), либо эйнштейновский вклад в их создание не выглядел значительным. Сам Эйнштейн также преувеличивал свой вклад в создание ОТО, когда говорил, что если бы он не сделал свою работу по СТО, то эту теорию так или иначе завершили бы другие, но что ОТО – его детище и что если бы не он, то в такой форме релятивистская теория гравитации появилась бы значительно позже [10]. «Математическая» реконструкция формирования ОТО вроде бы опровергает это предположение Эйнштейна.

В «математической аномальности» ОТО усматриваются и многие последующие ее трудности и особенности развития. И то, что она до сих пор находится «на линии огня» (постоянно подвергаясь экспериментальным проверкам и сопоставлению с выдвигаемыми вновь и вновь альтернативными теориями). И то, что в ней возникают сингулярности и, в частности, такие парадоксальные объекты, как черные дыры. И то, что в релятивистской космологии, основанной на ОТО, всерьез обсуждается поведение Вселенной на немыслимо малых расстояниях и временах порядка 10^{-30} см и сек, которые никогда не будут доступны эксперименту. Наконец, затянувшийся «физический застой» в теории струн объясняется тем, что эта теория является наследницей ОТО и геометрической полевой программы и потому, несмотря на ее «математические красоты», обречена на отрыв от эксперимента, патологическую многогранность моделей и тем самым на неуспех.

Вернемся теперь к истории формирования ОТО и, отдавая должное математике и математикам, рассмотрим более внимательно соотношение физического и математического аспектов этой истории. И тем самым произведем своего рода демифологизацию описанной схемы.

Дорелятивистские годы

Не только математики Риман и Клиффорд были провозвестниками геометризации физики, но и замечательный физик Дж. Фитцджералд (1851–1901). Он не только «первым предположил…, что движение в эфире влияет на размеры твердых молекулярных образований» (сокращение Фитцджералда–Лоренца), как заметил Дж. Лармор (цит. по [10. С. 120]), но уже в 1894 г. предположил, что «тяготение может быть обусловлено изменением структуры эфира, созданным присутствием материи» (цит. по [4. С. 239]). «Эфир Фитцджералда Эйнштейн назвал просто "пространством", или "пространством-временем", – заметил Уиттекер, – а несколько туманный термин Фитцджералда "структура" превратился у Эйнштейна в более точный – "кривизна". Таким образом, мы получаем центральный постулат теории Эйнштейна: "тяготение обусловлено изменением кривизны пространства-времени, созданным присутствием материи"» [4. С. 239].

Конечно, Эйнштейна с детских лет влекла природа, физика («чудо компаса»). Но несколько позже он испытал второе чудо – «чудо евклидовой геометрии» [15. С. 261–262]. Именно тогда он впервые оценил мощь аксиоматико-дедуктивного метода, который впоследствии использовал при построении СТО. В возрасте 12–16 лет он познакомился с основами математического анализа и аналитической геометрии. И это было «поистине увлекательно», в них «были взлеты, по силе впечатления не уступавшие “чуду” элементарной геометрии» [Там же. С. 263]. И, будучи студентом, он постоянно изучал насыщенные математикой труды великих теоретиков Г. Кирхгофа, Г. Гельмгольца, Г. Герца и др., иногда в ущерб математическим лекциям математиков А. Гурвица, Г. Минковского и др. Таким образом, он ценил математику, изучал ее, понимал ее важность для физики и, как показывают его ранние работы, весьма основательно владел основами математической и теоретической физики. В некотором смысле он оправдывал символический девиз своего родного города Ульма: “Ulmenses sunt mathematici” (то есть «Уроженцы Ульма – математики» [5. С. 17]). Впрочем, другие уроженцы Ульма не оставили значительных следов в математике, за исключением великого И. Кеплера, который родился вблизи этого швабского города.

Специальная теория относительности: Эйнштейн, Пуанкаре, Минковский

До сих пор не существует единого мнения о мере вклада Эйнштейна и Пуанкаре в создание СТО. Наиболее взвешенная оценка раньше других была дана В. Паули, который считал, что Пуанкаре первым описал группу Лоренца, но не сделал неких решающих шагов и что эти шаги были сделаны Эйнштейном [13. С. 12–13]. Эйнштейн не только систематически развил теорию на основе двух аксиом, наподобие евклидовой геометрии, но и дал полную операционально-измерительную интерпретацию кажущихся парадоксальными свойств пространства и времени. «В совпадении результатов, полученных независимо друг от друга Эйнштейном и Пуанкаре, – отмечал впоследствии тот же Паули, – я усматриваю глубокий смысл гармонии математического метода и анализа, проводимого с помощью мысленных экспериментов, опирающихся на всю совокупность физического опыта» [17. С. 189]. К тому же Эйнштейн в своей работе 1905 г., как и Пуанкаре, фактически вскрыл групповой характер преобразований Лоренца.

Таким образом, систематическое построение СТО и ее современная физическая интерпретация принадлежат Эйнштейну (см. также [18, 19]). И хотя Пуанкаре, открыв и описав математическую структуру СТО, в дальнейшем, судя по всему, остался на эфирно-электромагнитных позициях, он по праву считается одним из главных творцов теории. «Нельзя, однако, не признать того, – писал И.Ю. Кобзарев, – что открытая Пуанкаре группа Лоренца в принципе содержала уже все», т.е. основы СТО [19. С. 43].

Конечно, математик Пуанкаре опирался на основные физические работы по электродинамике движущихся тел, прежде всего, Х.А. Лоренца. Математик и физик-теоретик соединились в нем очень органично (к ним можно добавить и философа).

Мы знаем также, что Пуанкаре открыл и возможность четырехмерного представления группы Лоренца, предвосхитив концепцию математика Г. Минковского. Но он, в отличие от последнего, использовал это представление только как удобный математический прием для вычисления релятивистских инвариантов. Минковский же сформулировал СТО как теорию инвариантов группы Лоренца на языке четырехмерной псевдоевклидовой геометрии [6].

Четырехмерная формулировка СТО в настоящее время – это общепризнанное современное представление этой теории, не просто математический аппарат ее, а представление, пронизанное глубоким физическим смыслом. Можно согласиться с Р. Пенроузом, заметившим, что «специальная теория относительности оставалась неполной, несмотря на удивительную физическую интуицию Эйнштейна и значительный вклад Лоренца и Пуанкаре, пока Минковский не сформулировал свой фундаментальный революционный вклад на пространство-время» [20. С. 350].

Эйнштейн поначалу явно недооценил значение четырехмерного мира Минковкого, но на пути от принципа эквивалентности к тензорно-геометрической концепции гравитации, ставшей ядром ОТО, четырехмерие сыграло ключевую роль [6]. Но для того чтобы пройти этот путь, именно Эйнштейну пришлось проделать большую «физическую» работу.

Тензорно-геометрическая концепция гравитации: Эйнштейн, Минковский, Гроссман

У истоков ОТО мы видим одного Эйнштейна, который, пытаясь распространить теорию относительности на гравитацию, открывает принцип эквивалентности. Опираясь на факт равенства инертной и гравитационной масс, он приходит к эквивалентности однородного поля тяготения и равноускоренной системы отсчета (1907). Далее, на протяжении почти пяти лет Эйнштейн без особого успеха пытается применить принцип эквивалентности для построения теории произвольных гравитационных полей. И только после того, как он увидел, что для получения уравнений движения частицы в гравитационном поле можно использовать соответствующую четырехмерную вариационную формулировку закона движения Минковского:

$$\delta \int ds = 0,$$

где ds – метрика четырехмерного пространства-времени СТО ($ds^2=dx^2+dy^2+dz^2-c^2\,dt^2$), дело сдвинулось с мертвой точки. Надо было только перейти к более общему выражению для метрики, которое подсказывалось принципом эквивалентности. Тем самым требовался синтез этого принципа с четырехмерием – этих двух главных предпосылок релятивистской теории тяготения. Эйнштейн понимал, что тут нужна какая-то новая геометрическая теория, похожая на гауссову теорию поверхности [6, 8, 10, 21].

И здесь появляется математик, специалист по геометрии, М. Гроссман, студенческий друг Эйнштейна, к которому он обращается за помощью. До этого момента Гроссман никогда не занимался физикой. Он сразу понял, что Эйнштейну нужна риманова геометрия, которая после Римана была значительно продвинута вперед работами Э.Б. Кристоффеля, а затем Г. Риччи и Т. Леви-Чивитой. Они называли эту геометрическую теорию абсолютным дифференциальным исчислением. Заметим, что Эйнштейн во время учебы в Цюрихском политехникуме, не проявляя большого рвения в изучении математики, некоторые математические курсы слушал с интересом и энтузиазмом. «Захватывали меня, – вспоминал он в “Автобиографических набросках” 1955 г., – также лекции профессора Гейзера по дифференциальной геометрии, которые были настоящими шедеврами педагогического искусства и очень помогли мне позже в борьбе, развернувшейся вокруг общей теории относительности» [22. С. 351]. Этот запас знаний по дифференциальной геометрии в сочетании с концепцией Минковского позволил ему продвинуться достаточно далеко и понять, как от четырехмерной вариационной метрической формулировки принципа инерции в СТО перейти к соответствующей формулировке уравнений движения частиц в произвольных гравитационных полях. Нужно было только перейти от метрики Минковского к метрике

$$ds^2 = g_{ik} dx_i \, dx_k,$$

причем «предположение о том, что это поле можно превратить в псевдоевклидово с помощью простого преобразования координат» нужно было отбросить [Там же. С. 354]. «Тем самым проблема гравитации была сведена к чисто математической. Существуют ли дифференциальные уравнения для g_{ik}, которые инвариантны относительно нелинейных преобразований координат? Такие и только такие дифференциальные уравнения принимались во внимание как уравнения гравитационного поля» [Там же].

Именно на этой стадии Эйнштейну понадобилась помощь Гроссмана. Эйнштейн переезжает из Праги в Цюрих, и с августа 1912 г. начинается сотрудничество, которое только к июню 1913 г. привело к их совместной статье «Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation» [7]. Гроссман, как вспоминал Эйнштейн, «хотя охотно согласился совместно работать над проблемой, но все-таки с тем ограничением, что он не берет на себя никакой ответственности за какие-либо физические утверждения и интерпретации» [Там же. С. 355]. Не будем преуменьшать роль Гроссмана, ведь именно «он тщательно просмотрел литературу и скоро обнаружил, что указанная математическая проблема была уже решена Риманом, Риччи, и Леви-Чивитой. Это развитие в целом примыкало к теории кривизны поверхностей Гаусса». Уже Риман «показал, как из поля тензоров g_{ik} можно получить вторые производные. Из этого следовало, как должны выглядеть уравнения поля гравитации в случае, если поставлено требование инвариантности относительно группы всех непрерывных преобразований координат» [Там же]. Так что идея использования тензора Риччи для уравнений гравитационного поля, скорее всего, была предложена Гроссманом. Но это все проходило в совместной работе, где бесспорным лидером был физик Эйнштейн, который в течение 1912 г. уже второй раз убедился в конструктивной мощи математики. Первый раз – это была переоценка идей Минковского, «без которых общая теория относительности… быть может, оставалась бы в зачаточном состоянии» [23. С. 559]. А теперь это была риманова геометрия и тензорный анализ. 29 октября 1912 г. Эйнштейн писал А. Зоммерфельду из Цюриха: «Теперь я занимаюсь исключительно проблемой гравитации и надеюсь, что с помощью одного здешнего друга, математика, все трудности будут преодолены. Но одно точно: никогда в жизни я так не мучился, и теперь мне внушает большое уважение математика, тонкости которой я по своей ограниченности считал роскошью» [24. С. 191] (см. второй эпиграф).

В итоге Эйнштейн и Гроссман в упомянутой совместной статье пришли к тензорно-геометрической концепции гравитации, согласно которой метрика (точнее компоненты метрического тензора g_{ik}) получали двойное толкование: с одной стороны, они определяли геометрию пространства-времени, а с другой – были компонентами тензорного потенциала гравитационного поля. Это было четко обосновано и сформулировано в «Физической части», принадлежащей Эйнштейну. В «Математической части», написанной Гроссманом, обсуждались общековариантные уравнения гравитационного поля с использованием тензора кривизны Риччи R_{ik} :

$$R_{ik} = -x\, T_{ik},$$

где T_{ik} – тензор энергии-импульса материи.

И это был правильный путь. Но, не сумев согласовать эти уравнения с некоторыми физическими требованиями, выражающимися в таких методологических принципах физики, как принципы соответствия, сохранения, причинности, авторы ошибочно решили, что полевые уравнения не могут быть общековариантными. Поскольку же Эйнштейн был ведущей фигурой и именно он отвечал за физику, то в отказе от правильного решения повинен, в первую очередь, он. Все-таки некоторые претензии можно предъявить и Гроссману, так как к этому времени были уже известны тождества Л. Бьянки, из которых, в частности, следовало, что в левой части уравнения поля должен стоять не тензор Риччи, а более сложное выражение ($R_{ik} - \frac{1}{2}\, g_{ik}\mathrm{R}$). Тогда уже в 1913 г. они имели бы правильные общековариантные уравнения поля, а именно:

$$R_{ik} - \frac{1}{2}\, g_{ik}\mathrm{R} = -xT_{ik},$$

которые, скорее всего, им удалось бы согласовать с физическими требованиями. Об этих тождествах искушенный знаток геометрии должен был бы знать. Похоже, что ни Гроссман, ни тем более Эйнштейн о них не знали [10].

Общековариантные уравнения гравитационного поля: Эйнштейн и Гильберт (см. [9, 10])

С 1913 г. до середины октября 1915 г. Эйнштейн оставался на позициях двойной ковариантности теории гравитации. Сначала теория строилась как общековариантная конструкция, но затем приходилось накладывать некоторые ограничения и искать уравнения поля, ковариантные относительно более широкой группы, чем лоренцева, но более узкой, чем произвольные непрерывные преобразования. Одна из работ в этом направлении была сделана Эйнштейном совместно с Гроссманом, все остальные работы этого периода (1913–1915 гг.) были выполнены одним Эйнштейном. Особого успеха они не имели, хотя по ряду замечаний, сделанных им в статьях и письмах 1914–1915 гг., можно предполагать, что аргументы против общей ковариантности полевых уравнений, связанные с принципом соответствия (т.е. получением ньютоновского приближения) и законом сохранения энергии-импульса, если и не были преодолены полностью, то, во всяком случае, были существенно ослаблены.

И здесь на арене борьбы за общую ковариантность уравнений гравитации появляется новая математическая фигура, один из патриархов Геттингена Д. Гильберт, который с 1913 г. размышляет над фундаментальными проблемами физики, надеясь на то, что новейшие достижения в области электродинамики и теории относительности позволят ему, наконец, решить проблему аксиоматизации физики (6-я проблема Гильберта, выдвинутая им в докладе «Математические проблемы» в 1900 г. на 2-м Международном конгрессе математиков в Париже) [25]. Критическим для него стал как раз 1913 г., когда появилась нелинейная электродинамическая теория материи Г. Ми и тензорно-геометрическая теория гравитации Эйнштейна–Гроссмана.

Чтобы лучше понять последнюю, Гильберт приглашает Эйнштейна в Геттинген, и Эйнштейн там с 29 июня по 7 августа 1915 г. читает небольшой курс лекций для Гильберта, Ф. Клейна и других геттингенских математиков и физиков. Из писем Эйнштейна и Гильберта июля-августа 1915 г. можно заключить, что эти лекции и их обсуждение были стимулирующими для обоих. Эйнштейн в письме Г. Цангеру пишет: «Сейчас с теорией тяготения все стало ясно…», а Гильберт – к Шварцшильду пишет о том, что лекции Эйнштейна были событием. Судя по письму Эйнштейна Х.А. Лоренцу от 12 октября 1915 г., к этому времени он близок к тому, чтобы вернуться к общековариантным уравнениям гравитации.

Наступает драматический ноябрь 1915 г., когда оба – Физик и Математик – выходят на финишную прямую и в течение трех недель доводят до завершения свои работы, столетний юбилей результатов которых отмечается в этом году физиками всего мира. Не будем детально реконструировать последовательность событий.

Суть дела в том, что физик Эйнштейн, осознав необходимость возвращения к идее общей ковариантности уравнений гравитации, а тем самым к использованию тензора Риччи R_{ik}, сначала пытается выяснить, в каких случаях уравнение Эйнштейна–Гроссмана

$$R_{ik} = -xT_{ik}$$

приводит к разумным физическим результатам. Он полагает, что оно будет верным, если в качестве материи рассматривается только электромагнитное поле, для которого след тензора энергии-импульса T=0. Второй, очень важный случай – это расчет движения перигелия орбиты Меркурия и отклонение света в гравитационном поле на основе уравнения $R_{ik} = 0.$ Эта работа была доложена на заседании Прусской академии наук 18 ноября (и опубликована 25 ноября), в этой работе впервые было объяснено аномальное смещение перигелия Меркурия и дан правильный расчет отклонения света в гравитационном поле (в два раза больший, чем таковой, вычисленный лишь с помощью принципа эквивалентности). Это подтвердило правильность возвращения к тензору Риччи. Еще через неделю, 25 ноября, Эйнштейн, опираясь на соображения, связанные с законом сохранения энергии, получает общековариантные уравнения гравитации в форме

$$R_{ik} = -x\,(T_{ik} - \tfrac{1}{2}\, g_{ik} T).$$

Но в это время Гильберт, которому Эйнштейн послал свою первую работу и последующие, сопровождая их письмами, напряженно работал над своей аксиоматически сформулированной единой теорией гравитационного и электромагнитного полей и сначала 13 ноября в письме Эйнштейну излагает суть своей теории, а затем не позже 18 ноября посылает ему корректуру своего доклада «Основания физики», который он делает 20 ноября в Геттингенском математическом обществе. В этом докладе фактически из общековариантного вариационного принципа, в котором в качестве гравитационной части лагранжиана используется скалярная кривизна К, он получает, в частности, правильные общековариантные уравнения гравитации в форме

$$\sqrt{g}\,(K_{\mu\gamma} - \tfrac{1}{2}\, K g_{\mu\gamma}) = -\frac{\partial \sqrt{g}\,\mathbf{L}}{\partial g_{\mu\gamma}},$$

здесь $K_{\mu\gamma}$ – тензор Риччи, К – скалярная кривизна, а правая часть – тензор энергии-импульса нелинейной электродинамики Ми.

Тексты докладываемых работ и красноречивая содержательная переписка (наиболее яркие места из нее мы приводим ниже) отчетливо показывают различие целей и подходов физика и математика, желающего внести свой вклад в физику. Физик (Эйнштейн), занятый поиском уравнений гравитации, действует индуктивно, двигаясь последовательно и опираясь на физические аргументы и экспериментально-эмпирические подтверждения правильности выбранного пути. Математик же (Гильберт), ставя задачу аксиоматического построения фундамента физики, действует дедуктивно, опираясь на применение мощных математических методов (вариационное исчисление, теория непрерывных групп, риманова геометрия) к синтезу еще не завершенной теории Эйнштейна и физически ненадежной, но кажущейся перспективной нелинейной электромагнитной теории материи Г. Ми.

Вот несколько фрагментов из переписки наших героев. 7 ноября Эйнштейн сопровождает посланную Гильберту корректуру доклада от 4 ноября следующими словами: «…Я изменил свои гравитационные уравнения (т.е. вернулся к уравнениям с тензором Риччи. – *В.В.*), после того как примерно 4 недели назад понял иллюзорность моей прежней аргументации. Зоммерфельд писал мне, что Вы тоже нашли в моем супе волос, что сделало его совершенно неприемлемым для Вас (очевидно, речь идет о нековариантном подходе Эйнштейна к полевым уравнениям 1914–1915 гг. – *В.В.*)» (цит. по [9. С. 1363]).

В письме от 13 ноября Гильберт кратко, но весьма точно излагает существо своей работы, которую он сначала собирался докладывать 16 ноября, но затем его доклад был перенесен на 20 ноября: «…Я считаю свою теорию математически идеальной, хотя математические выкладки не выглядят вполне прозрачными и, строго говоря, не соответствуют аксиоматическому методу… Уравнения электродинамики на основе одной общей теоремы (это тождество Бьянки, оно же будет потом известно как 2-я теорема Э. Нетер. – *В.В.*) оказывается математическим следствием гравитационных уравнений. Таким образом, гравитация и электромагнетизм перестают быть совершенно различными сущностями. Понятие энергии… образует основу для дальнейшего построения… Из него следуют на основе очень простой аксиомы еще четыре недостающих «пространственно-временных» уравнения… (последнее замечание достойно особого внимания, поскольку в нем идет речь об аксиоме, которой нет в опубликованной версии доклада, и об ограничении общей ковариантности, которого там тоже нет. – *В.В.*)» [9. С. 1393]. Эйнштейн, получив корректуру доклада Гильберта, пишет ему 18 ноября о совпадении гравитационных уравнений Гильберта с его уравнениями, что может означать, что в присланной версии доклада Гильберта уравнения гравитации с половинным членом не были явно выписаны, и продолжает: «…Трудность (с получением уравнений гравитации. – *В.В.*) была не в том, чтобы найти общековариантные уравнения для $g^{\mu\gamma}$; это можно было легко сделать с помощью тензора Римана (тензор Риччи – свертка этого тензора 4-го ранга по двум индексам. – *В.В.*). Очень трудно было понять, что эти уравнения являются простым и естественным обобщением ньютоновского закона… Это удалось мне сделать лишь в последние недели… Сегодня я передал в Академию работу, в которой без каких-либо дополнительных гипотез я количественно вывел из общей теории относительности движение перигелия Меркурия, открытое Леверрье» [Там же]. Наконец, Гильберт 19 ноября, буквально накануне своего доклада, сообщает Эйнштейну: «…Сердечнейшее поздравление по поводу решения проблемы движения Меркурия. Если бы я мог считать так же быстро, как Вы, то электрон должен был бы капитулировать перед лицом моих уравнений, а атом водорода принес бы свои извинения за то, что не излучает» [Там же]. Из последнего письма видно, что Гильберт надеялся получить электрон и его, «квантовое поведение» в атоме из уравнений своей единой теории поля. Из письма же

Гильберта от 13 ноября фактически видно, что текст первоначального доклада мог существенно отличаться от того, который был позже опубликован. И это, кстати говоря, подтвердилось, когда в 1997 г. в архиве Геттингенского университета нашлась вторая корректура доклада Гильберта с пометками автора (кстати, окончательный вариант доклада был опубликован только в марте 1916 г.) [9]. Мы не будем здесь вдаваться в обсуждение этой «тонкой структуры» открытия общековариантных уравнений гравитационного поля Эйнштейном и Гильбертом. Заметим только, что возникшее было осложнение в их отношениях, связанное с приоритетными претензиями, уже через месяц рассеялось и впоследствии никогда между ними не возникало.

Это краткое рассмотрение заключительного этапа взаимодействия Эйнштейна с математиками (на этот раз с Гильбертом) решительно опровергает утверждение о том, что именно математик, в силу математического характера ОТО, завершил создание этой теории. Эйнштейн и на этом этапе был локомотивом, ведущей фигурой, хотя не будем недооценивать вероятного влияния на него математика Гильберта и несомненный вклад последнего в открытие общековариантных уравнений гравитации, а также в формирование полевой геометрической программы синтеза физики.

Геометрическая полевая программа синтеза физики и космология: Эйнштейн и математики (Г. Вейль, Т. Калуца, А.А. Фридман и другие, 1917-1920-е годы)

Контуры гильбертовской единой теории, соответствующие провозглашенному им «теоретико-полевому идеалу» единства физики, были в кратчайшем виде набросаны в цитированном выше письме Гильберта Эйнштейну от 13 ноября 1915 г. Поначалу и даже спустя 1,5–2 года после создания ОТО Эйнштейн весьма скептически относился к такого рода объединению гравитационного и электромагнитного полей. Автор одной из лучших биографии Эйнштейна цитирует дневниковые записи швейцарского писателя Р.Я. Гумма, встречавшегося с Эйнштейном в мае 1917 г. Гумм в те годы интересовался теорией относительности и слушал лекции по физике и математике в Геттингене. Он интересовался мнением Эйнштейна о теории Гильберта и его попытке реализации «теоретико-полевого идеала единства». Вот его свидетельство: «Эйнштейн очень осторожен и – *физик до мозга костей* (курсив наш. – *В.В.*), он не спешит броситься в атаку на всеобщее, как мы в Геттингене… Я высказался в том смысле, что он мог бы использовать квантовую теорию, чтобы модифицировать теорию гравитации, в отличие от Гильберта, которому хотелось вывести квантовую теорию из теории гравитации (точнее, из его единой теории. – *В.В.*)». И далее он приводит ответ Эйнштейна: «…Из этого ничего не получится… Идея относительности не может дать ничего большего, чем теория гравитации. Мысль о том, чтобы построить силой своей фантазии картину мира, можно было бы назвать прекрасной, она могла бы дать известные результаты. Но история физики учит, что подобные попытки всегда заканчиваются неудачей… Разнообразие тензоров (или соответствующих лагранжианов. – *В.В.*) так велико, что невозможно сказать, какие из них следует выбрать для обоснования электродинамики (точнее, ее нелинейного обобщения, которое бы содержало частицеподобные решения. – *В.В.*). К тому же экспериментальные данные слишком скудны, они еще не дают надежной путеводной нити» (цит. по [26. С. 126–127]). Это – 1917 г., в этом и последующем году Эйнштейн закладывает основы релятивистской космологии, разрабатывает теорию гравитационных волн, вопрос о законе сохранения энергии-импульса в ОТО. Он еще стоит на твердой, физической, основе. Но пройдет несколько лет, появятся новые, математически более заманчивые проекты объединения гравитации и электромагнетизма (теории Г. Вейля и Т. Калуцы, которые были прежде всего математиками), и Эйнштейн, очарованный их красотой, дерзостью и математической элегантностью, воспаряет над физикой и надолго погружается в туманные облака геометрической полевой программы [14].

Об этом процессе «воспарения» свидетельствуют многие высказывания Эйнштейна 1919–1921 гг., как и первые теоретические наброски, относящиеся к этому времени. Первые его аффинные варианты единой теории появляются в 1923–1924 гг., а спустя десять лет, в лекции «О методе теоретической физики» в Оксфорде (10 июня 1933 г.), после череды следующих друг за другом надежд и разочарований он – уже далеко не «физик до мозга костей», а скорее математик, верящий в силу математических прорывов, прозрений в познании физической реальности:

«Весь предшествующий опыт убеждает нас в том, что природа представляет собой реализацию простейших математически мыслимых элементов. Я убежден, что посредством чисто математических конструкций мы можем найти те понятия и закономерные связи между ними, которые дадут нам ключ к пониманию явлений природы. Опыт может подсказать нам соответствующие математические понятия, но они ни в коем случае не могут быть выведены из него. Конечно, опыт остается единственным критерием пригодности математических конструкций физики. Но настоящее творческое начало присуще именно математике. Поэтому я считаю в известном смысле оправданной веру древних в то, что чистое мышление в состоянии постигнуть реальность» [27. С. 184].

«“Фазовый переход” – превращение Эйнштейна из “физика до мозга костей” в “математика”, подобного Гильберту и Вейлю, – свершился. Впрочем, он произошел уже в начале 1920-х гг., но зафиксирован в яркой, афористичной форме несколько позже. С. Вайнберг, размышляя об ошибках Эйнштейна, замечает, что “вероятно, наиболее значительной ошибкой Эйнштейна было то, что он стал пленником своего собственного успеха”, связанного с геометризацией гравитации и ОТО, когда всерьез и надолго увлекся “построением единой теорией поля на основе геометрических принципов”» [28. P. 33].

Вернемся к математикам, которые внесли основной вклад в геометрическую полевую программу на раннем этапе. Тут их приоритет неоспорим, если не считать саму ОТО, которая стала выдающимся образцом геометризации физических взаимодействий. Способ объединения гравитационного и электромагнитного полей в теории Гильберта был на редкость странным и нефизичным. Уравнения электродинамики рассматривались как следствие уравнений гравитации. При этом предполагалось, что вместо уравнений Максвелла надо опираться на весьма сомнительное (калибровочно неинвариантное и неоднозначное) их обобщение на основе нелинейной электромагнитной теории материи Ми. Но ученик Гильберта, принявший от него эстафету увлеченности физикой и ее философскими проблемами, Г. Вейль выдвинул в 1918 г. первый образцовый вариант геометрического объединения гравитационного и электромагнитного полей, основанный на расширении четырехмерной римановой геометрии до одного из вариантов геометрии аффинной связности. При этом электромагнитные потенциалы получали чисто геометрическое толкование, как и гравитационные, и оба поля геометризовались наравне в некоторой обобщенной геометрии четырехмерного пространства-времени (см. о Вейле и его теории [14, 29–31]).

В следующем году малоизвестный кенигсбергский математик Т. Калуца, изучавший математику в Геттингене и Кенигсберге, показал, что если от четырехмерной римановой геометрии перейти к пятимерной римановой геометрии, то появляется возможность толкования четырех компонент электромагнитного потенциала. Конечно, Калуца ссылался на теорию Вейля. Как и Вейль, он послал свою работу Эйнштейну, после замечаний которого статья была доработана и, как и статья Вейля, опубликована в «Докладах Прусской академии наук» в 1921 г. [32] (см. также [14]).

Хотя Эйнштейн поначалу весьма критически воспринял обе единые теории, прежде всего в отношении их физической обоснованности, сами размышления над ними и их обсуждение подготавливали тот «фазовый переход» в стиле его теоретизирования, о котором говорилось выше. Кстати, оба молодых математика (они с 1885 г., и, значит, им не было и 35 лет, когда они предложили свои варианты единых теории поля) вполне осознавали масштаб и философское значение своих теорий. В знаменитой монографии «Пространство. Время. Материя» Вейль, имея в виду свою единую теорию, писал: «Мечта Декарта о чисто геометрической физике получает как будто свое воплощение удивительным и, конечно, вовсе не предусмотренным им образом…» [30. С. 379].

Весьма возвышенно высказывался и Калуца: «Несколько лет назад Г. Вейль… сделал поразительно смелый шаг к решению этой проблемы (т.е. проблемы построения единой теории поля. – *В.В.*) – одного из великих устремлений человеческого духа. Он еще раз радикально пересмотрел основания геометрии и ввел наряду с тензором $g_{\mu\gamma}$ фундаментальный метрический вектор, истолковав его как электромагнитный потенциал q_{μ}. Это полная мировая метрика оказывается у него единым источником всех явлений природы. Здесь ставится та же цель, но выбран иной путь… Мысленно еще более полная реализация идеи единства, а именно, чтобы и гравитационное, и электромагнитное поля выводились из одного-единственного универсального тензора» [32. С. 529].

Конечно, это не единственные математики, которые время от времени проявляли интерес к геометрической полевой программе. Назовем, например, Т. Леви-Чивиту, Я.А. Схоутена, О. Веблена, Л. Эйзенхарта, Д. ван Дантцига и др. В разное время едиными теориями поля занимались и многие выдающиеся физики, такие, как А.С. Эддингтон, В. Паули, Э. Шредингер, О. Клейн; из советских физиков – И.Е. Тамм, В.А. Фок, В.К. Фредерикс, Ю.Б. Румер и др. [11, 14].

Бесспорно значительное воздействие этого направления на развитие современной дифференциальной геометрии [11, 33]. Уже в начале 1930-х гг. Эйнштейн говорил о множестве проектов единой теории поля как о «кладбище погребенных надежд» [34. С. 401], но продолжал работать в этом направлении. И только в последней своей работе, опубликованной в 1955 г., он как будто, окончательно разочаровывается в том пути, на который его «завлекли» геттингенские математики: «Можно убедительно доказать, что реальность вообще не может быть представлена непрерывным полем. Из квантовых явлений, по-видимому, следует, что конечная система с конечной энергией может полностью описываться конечным набором чисел (квантовых чисел). Это, кажется, нельзя совместить с теорией континуума и требует для описания реальности чисто алгебраической теории» [36. С. 873]. И все-таки, хотя геометрическая полевая программа так и не привела к успеху, в процессе ее разработки было выдвинуто немало важных физических идей и математических методов, которые так или иначе повлияли на развитие фундаментальной физики, прежде всего, концепция калибровочных полей [14].

Второе направление, связанное с развитием ОТО на рубеже 1920-х гг., относится к релятивистской космологии. Основы ее были заложены в основном самим Эйнштейном в его основополагающей статье 1917 г. «Вопросы космологии и общая теория относительности» [35], когда он еще был, скорее, «физиком», чем «математиком». Впрочем, в вычислениях уже тогда ему помогал математик Я. Громмер, впоследствии его соавтор. Для обеспечения устойчивости трехмерного сферического замкнутого мира с постоянной положительной кривизной Эйнштейну пришлось ввести в гравитационные уравнения член с космологической постоянной Λ, которая позже была интерпретирована как особая антигравитирующая среда. Голландский астроном и физик-теоретик В. де Ситтер сразу же подхватил идеи Эйнштена и разработал другую модель статической Вселенной с нулевой средней плотностью материи, но ненулевой космологической постоянной [13].

И тут появляется наш соотечественник, математик А.А. Фридман, который показывает, что космологические уравнения Эйнштейна содержат и нестационарные решения, которые можно интерпретировать как расширяющуюся Вселенную. Ученик выдающегося русского математика В.С. Стеклова, специалист по теории дифференциальных уравнений с частными производными, Фридман внес также значительный вклад в гидродинамику и динамическую метеорологию и после возвращения в Петроград в 1920 г. заинтересовывается общей теорией относительности, очевидно под влиянием физика В.К. Фредерикса, вернувшегося из Геттингена, где он был ассистентом Д. Гильберта.

В.А. Фок, который слушал доклады Фридмана и Фредерикса по ОТО, вспоминал, что «Фредерикс глубоко понимал физическую сторону теории, но не любил математических выкладок, Фридман же делал упор не на физику, а на математику» и что «он стремился к математической строгости и придавал большое значение полной и точной формулировке исходных предпосылок» (цит. по [37. С. 32]). Фок также вспоминал, что «Фридман не раз говорил, что его дело – указать возможные решения уравнения Эйнштейна, а там пусть физики делают с этими решениями, что хотят» [Там же. С. 33]. Кстати говоря, за год до своей трагической кончины, будучи в Голландии, Фридман вместе с выдающимся голландским математиком Я. Схоутеном опубликовал статью об обобщении теории Вейля (1924), которую, как и геометрическую полевую программу в целом, он высоко ценил.

Все-таки космология, в отличие от геометрической полевой программы, была значительно более физическим делом, тесно связанным с астрономическими наблюдениями. Поэтому в ее дальнейшем развитии гораздо большую роль играли физики и астрономы (де Ситтер, Эддингтон, Ж. Леметр, Э. Хаббл и др.), чем математики.

Заключительные замечания

1. Хотя, несомненно, что математика и математики сыграли важную роль в создании общей теории относительности, исторический анализ убедительно показывает, что решающий вклад в формирование ОТО внес единственный физик, и этот физик – Эйнштейн (см. первый эпиграф). С 1907 по 1916 г. именно он настойчиво пытался разработать релятивистскую теорию тяготения. Исходный физический принцип кинематизации, а затем и геометризации гравитации, именно принцип эквивалентности, опирающийся на факт равенства инертной и гравитационной масс, был выдвинут Эйнштейном. На основе этого принципа он предсказал два релятивистских гравитационных эффекта. Этот же принцип привел его к необходимости выхода за пределы СТО и идее общей относительности, а также связанному с ней требованию общей ковариантности. Далее, Эйнштейн же, по существу, пришел к тензорно-геометрической концепции гравитации, этого концептуального ядра ОТО. Он же в ноябре 1915 г. сумел преодолеть сомнения в общей ковариантности гравитационных уравнений и в конце концов найти их правильную форму. Таким образом, не случайно и вполне справедливо, что ОТО прочно, и в первую очередь, связывается с именем Эйнштейна, который сам со временем под влиянием своего детища стал в большей степени математиком, чем физиком.

2. Что же касается вклада математиков в создание ОТО, то вклад их можно разделить на косвенный и непосредственный. Первый связан с четы-

рехмерной формулировкой СТО Пуанкаре и особенно Минковского, которая вместе с соответствующей метрической формулировкой принципа инерции оказалась для Эйнштейна переходной, промежуточной ступенью к римановой геометрии и уравнениям движения в поле тяготения в виде уравнений геодезической. Второй, прямой вклад относится к непосредственному участию М. Гроссмана, а затем Д. Гильберта в разработку ОТО. Гроссман при этом был явно ведомой фигурой, хотя ключевая характеристика гравитации – тензор Риччи впервые появился в гроссмановской части их совместной статьи с Эйнштейном. Гильберт, поставив задачу аксиоматизации фундаментальной физики, обращается к уже созданной теории Эйнштейна–Гроссмана, в которой еще отсутствуют правильные общековариантные уравнения гравитации. Он строит единую теорию гравитационного и электромагнитного полей и получает, в частности, общековариантные уравнения гравитации из общековариантного вариационного принципа, в котором в качестве гравитационной части лагранжиана используется скалярная кривизна. Конечно, и на этом этапе ведущей фигурой был Эйнштейн, хотя Гильберт на несколько дней раньше него получил правильные уравнения гравитации.

Отметим, что, несмотря на то что в ноябре 1915 г. между Эйнштейном и Гильбертом ощущается дух соревнования, все-таки и на этой стадии преобладает атмосфера взаимного доверия и даже дружелюбия, а не противостояния. В отношении же Гроссмана можно сказать, что он – математический помощник Эйнштейна, соавтор. И, таким образом, в 1912–1915 гг. мы видим не столько противостояние физика и математиков (не «физик против математиков»), сколько их сотрудничество («физик вместе с математиками» (см. третий эпиграф).

3. А вот первенство в выдвижении геометрической полевой программы синтеза, опирающейся на ОТО, принадлежало математикам – Гильберту, Вейлю, Калуце, хотя последние тридцать с лишним лет жизни Эйнштейн безуспешно пытался ее реализовать. Его очаровала мощь, красота и дерзость этой программы, к которой он первоначально относился достаточно скептически. В начале 1920-х с ним как бы происходит своего рода «фазовый переход»: из «физика до мозга костей» он превращается в «математизирующего теоретика», пытающегося угадать подходящее обобщение четырехмерной римановой геометрии. В начале 1930-х он даже говорит о том, что при построении фундаментальной физической теории «настоящее творческое начало присуще именно математике» [27. С. 184]. Первые симптомы этого «фазового перехода» появились осенью 1912 г., когда, благодаря Гроссману, он вышел на риманову геометрию как определяющую математическую структуру ОТО (см. п. 2). Достойно внимания и то, что неудачи геометрической полевой программы не означали ее бесплодности: в ее рамках были развиты некоторые важные физические концепции, например концепция калибровочных полей, и некоторые другие [14]. И, тем более, эта неудача ни в коей мере не бросает тень на саму ОТО, на основе которой уже в 1917 г. са-

мим Эйнштейном были заложены основы релятивистской космологии, хотя начало наиболее перспективному ее направлению, именно теории расширяющейся Вселенной, положил российский математик А.А. Фридман.

4. И последнее. ОТО стала первым нетривиальным примером беспрецедентной мощи математики в физике, проявления поражающей воображение «предустановленной гармонии между чистой математикой и физикой» (Минковский, Ф. Клейн, Гильберт, Вейль), или «непостижимой эффективности математики в естественных науках» (Ю. Вигнер) [38]. Но гармония эта достигается, реализуется, как показывает рассмотренная история, в процессе сложного, челночного взаимодействия между физикой и математикой и, соответственно, между физиками и математиками.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вейль Г.* Давид Гильберт и его математическое творчество // Г. Вейль. Математическое мышление / под ред. Б.В. Бирюкова и А.Н. Паршина. – М.: Наука, 1989. – С. 214–256.
2. *Einstein A.* To Arnold Sommerfeld, 29.X.1912 // A. Einstein. The Collected papers. V. 5: The Swiss Years: Correspondence, 1902–1914 / eds. M. Klein, A. Kox, R. Schulmann. Princeton: Princeton University Press, 1993. – P. 505–506.
3. *Клейн Ф.* О геометрических основаниях лоренцевой группы // Новые идеи в математике. Сборник № 5: Принцип относительности в математике. – СПб.: Изд. «Образование», 1914. – С. 144–174.
4. *Уиттекер Э.* История теории эфира и электричества: Современные теории (1900–1926). – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. – 464 с.
5. *Оханьян Х.* Эйнштейн: настоящая история великих открытий. – М.: Эксмо, 2009. – 384 с.
6. *Визгин В.П.* Концептуальные истоки общей теории относительности (к 100-летию принципа эквивалентности и четырехмерного мира Г. Минковского) // Исследования по истории физики и механики. 2007 г. – М.: Наука, 2008. – С. 253–281.
7. *Эйнштейн А., Гроссман М.* Проект обобщенной теории относительности и теории тяготения // А. Эйнштейн. Собрание научных трудов. – Т. 1. – М.: Наука, 1965. – С. 227–266.
8. *Визгин В.П.* Релятивистская теория тяготения (истоки формирования, 1900–1915 гг.). – М.: Наука, 1981. – 352 с.
9. *Визгин В.П.* Об открытии уравнений гравитационного поля Эйнштейном и Гильбертом. Новые материалы // Успехи физических наук. – 2001. – Т. 1. – 171. – № 12. – С. 1347–1363.
10. *Пайс А.* Научная деятельность и жизнь Альберта Эйнштейна. – М.: Наука, 1989. – 568 с.
11. *Reich K.* Die Entwicklung des Tensorkalkküls: vom absoluten Differentialkalkül. – Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser, 1994. – 331 s.
12. *Тропп Э.А., Френкель В.Я., Чернин А.Д.* Александр Александрович Фридман. – М.: Наука, 1988. – 304 с.
13. *Ellis G.F.R.* The Expanding Universe: A History of Cosmology from 1917 to 1960 // Einstein and the History of General Relativity / eds. D. Howard, J. Stachel. – Boston, Basel, Berlin: Birkhäuser, 1989. – P. 367–431.
14. *Визгин В.П.* Единые теории поля в квантово-релятивистской революции: Программа полевого геометрического синтеза физики. – Изд. 2-е, испр. – М.: КомКнига, 2006. – 312 с. (1-е издание – 1985 г.).

15. *Эйнштейн А.* Автобиографические заметки // А. Эйнштейн. Собрание научных трудов. – Т. 4. – М.: Наука, 1967. – С. 259–293.
16. *Паули В.* Теория относительности. – М.-Л.: ГТТИ, 1947. – 300 с.
17. *Паули В.* Теория относительности и наука // В. Паули. Физические очерки. М.: Наука, 1975. – С. 187–193.
18. *Гинзбург В.Л.* Как и кто создал теорию относительности? (Опыт рецензии с предисловием и комментариями) // В.Л. Гинзбург. О теории относительности: сборник статей. – М.: Наука, 1979. – С. 116–143.
19. *Кобзарев И.Ю.* Частная теория относительности // Физика XIX–XX вв. в общенаучном и социокультурным контекстах. Физика XX века / отв. ред. Г.М. Идлис. – М.: Янус-К, 1997. – С. 31–55.
20. *Пенроуз Р.* Путь к реальности, или законы, управляющие Вселенной. Полный путеводитель. – М. – Ижевск: Ин-т компьютерных исслед.; НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2007. – 912 с.
21. *Vizgin V.P.* The Century of Tensor Geometrical Conception of Gravitation as a Foundation for General Relativity // Physical Interpretations of Relativity Theory: Proc. of Intern. Scientific Meeting. PIRT-2013. – Moscow: BMSTU, 2013. – P. 343–350.
22. *Эйнштейн А.* Автобиографические наброски // Эйнштейн А. Собрание научных трудов. – Т. 4. – М.: Наука, 1967. – С. 350–356.
23. *Эйнштейн А.* О специальной и общей теории относительности // Эйнштейн А. Собрание научных трудов. – Т. 1. – М.: Наука, 1965. – С. 530–600.
24. А.Эйнштейн А. Зоммерфельду, 29 октября 1912 г. // Из переписки Зоммерфельда с Эйнштейном / А. Зоммерфельд. Пути познания в физике. – М.: Наука, 1973. – С. 191–246.
25. *Гильберт Д.* Математические проблемы // Гильберт Д. Избранные труды. – Т. II. – М.: «Факториал», 1998. – С. 401-436.
26. *Зелиг К.* Альберт Эйнштейн. – М.: Атомиздат, 1964. – 206 с.
27. *Эйнштейн А.* О методе теоретической физики // Эйнштейн А. Собрание научных трудов. – Т. 1. – М.: Наука, 1967. – С. 181–186.
28. *Weinberg S.* Einstein's Mistakes // Phys. Today. – 2005. – V. 58 (1). – P. 31–35.
29. *Вейль Г.* Гравитация и электричество // Альберт Эйнштейн и теория гравитации: сборник статей. – М.: Мир, 1979. – С. 5133–528.
30. *Вейль Г.* Пространство. Время. Материя: лекции по общей теории относительности. – Изд. 2-е, испр. – Едиториал УРСС, 2004. – 456 с.
31. *Scholz E.* Weyl's Contribution to Geometry in the Years 1918 to 1923 // The Intersection of History and Mathematics / eds. Ch. Sasaki. Basel etc.: Birkhäuser, 1994. – P. 203–230.
32. *Калуца Т.* К проблеме единства физики // Альберт Эйнштейн и теория гравитации: сборник статей. – М.: Мир, 1979. – С. 529–534.
33. *Вейль Г.* Теория относительности как стимул математического исследования // Г. Вейль. Математическое мышление / под ред. Б.В. Бирюкова, А.Н. Паршина. – М.: Наука. – С. 182–194.
34. *Эйнштейн А.* Современное состояние теории относительности // Эйнштейн А. Собрание научных трудов. – Т. II. – М.: Наука, 1966. – С. 399–402.
35. *Эйнштейн А.* Вопросы космологии и общая теория относительности // Эйнштейн А. Собрание научных трудов. – Т. I. – М.: Наука, 1965. С. 601–612.
36. *Эйнштейн А.* Релятивистская теория несимметричного поля // Эйнштейн А. Собрание научных трудов. – Т. II. – М.: Наука, 1966. – С. 849–873.
37. *Визгин В.П., Горелик Г.Е.* Восприятие теории относительности в России и СССР // Эйнштейновский сборник. 1984–1985 / отв. ред. И.Ю. Кобзарев. – М.: Наука, 1988. – С. 7–70.

38. *Визгин В.П.* «Предустановленная гармония между чистой математикой и физикой» // Математика и реальность. Труды Московского семинара по философии математики / под ред. В.В. Бажанова и др. – М.: Изд. МГУ, 2014. – С. 99–120.

EINSTEIN AND MATHEMATICIANS (FOR THE 100TH ANNIVERSARY OF THE CREATION OF THE GENERAL THEORY OF RELATIVITY)

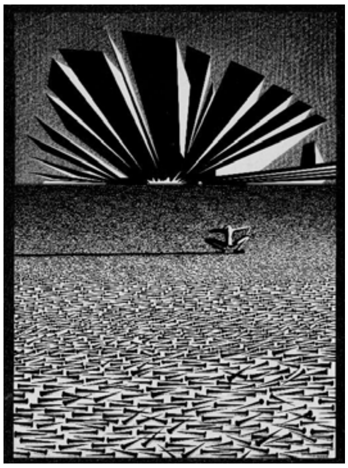
V.P. Vizgin

This article dedicated to the 100th anniversary of creating the general theory of relativity provides an overview of the history of developing the theory from the principle of equivalence (1907) to obtaining correct generally covariant equations of the gravitational field in November 1915. Particular attention is given to mathematics and mathematicians (Hermann Minkowski, Marcel Grossmann, David Hilbert) who played a significant part in that history. It is shown that, despite this, it was Albert Einstein, a "physicist to the tips of his fingernails," who made the decisive contribution to the creation of the theory, only not by himself, but in the process of "strong interaction" with the said mathematicians. It is also noted that from the early 1920s Einstein became the leader of the geometrical field program of synthesis of physics initiated by the Goettingen mathematicians. He joined them, believing that "the actual creative principle lies in mathematics".

Key words: history of the theory of relativity, general theory of relativity, tensor-geometrical concept of gravitation, Riemannian geometry, generally covariant equations of the gravitational field, geometrical field program, interrelation between physics and mathematics, Albert Einstein, Hermann Minkowski, Marcel Grossmann, David Hilbert, Hermann Weyl.

ИЗ НАСЛЕДИЯ ПРОШЛОГО

ОТНОШЕНИЕ МЕЖДУ МАТЕМАТИКОЙ И ФИЗИКОЙ[1]



(Proceedings of the Royal Society, Edinburgh A vol. 59 (1938–39), p. 122–129)

П.А.М. Дирак

Физик в своем изучении явлений природы обладает двумя методами продвижения вперед: (1) методом эксперимента и наблюдений и (2) методом математического рассуждения. Первый представляет собой просто собирание нужных данных; второй позволяет выводить результаты экспериментов, которые еще не были проделаны. Нет никакой логической причины для того, чтобы второй метод был вообще возможен, но мы обнаруживаем на практике, что он действует и приводит к замечательным успехам. Это следует приписать некоторому *математическому качеству в Природе,* качеству, которого случайный наблюдатель и не заподозрит, но которое, тем не менее, играет важнейшую роль в том, как Природа устроена.

Можно описать это математическое качество в Природе, утверждая, что Вселенная так устроена, что математика оказывается полезным инструментом ее исследования. Однако недавнее развитие физической науки показывает, что это слишком примитивное понимание вопроса. Связь между математикой и описанием Вселенной гораздо глубже, чем эта простая идея, и мы можем получить представление о ней только после тщательного исследования разных факторов, из которых эта связь складывается. Главная задача моего сообщения и состоит в том, чтобы дать вам такое представление. Я собираюсь показать, как взгляды физиков на этот предмет постепенно менялись под влиянием последовательности недавних открытий в физике, а затем я хочу немного порассуждать о будущем.

[1] Перевод с английского М.К. Поливанова.

Возьмем в качестве отправной точки ту схему физической науки, которая была повсеместно признана в прошлом столетии, – механическую схему. Она рассматривает всю Вселенную как динамическую систему (разумеется, невероятно сложную динамическую систему), подчиненную законам движения в основном ньютонова типа. Роль математики в такой схеме состоит в том, чтобы представить законы движения уравнениями и получить решения этих уравнений, относящиеся к наблюдаемым условиям.

Руководящая идея этих применений математики к физике состоит в том, что уравнения, представляющие законы движения, *должны быть просты.* Весь успех этой схемы основан на том, что простые уравнения, кажется, работают. Физик получает таким образом в руки *принцип простоты,* которым можно пользоваться как инструментом в исследовании. Если он получает из каких-то грубых экспериментов данные, которые находятся в грубом согласии с некоторыми простыми уравнениями, он делает вывод, что если он проведет более аккуратный эксперимент, то данные будут находиться в лучшем согласии с уравнениями. Однако такой метод очень ограничен, потому что принцип простоты применим к фундаментальным законам движения, а не к явлениям Природы в общем случае. Так, например, грубый эксперимент, устанавливающий связь между давлением и объемом газа при определенной температуре, дает результаты, находящиеся в согласии с законом обратной пропорциональности. Но было бы неверно делать из этого вывод, что более тщательный эксперимент подтвердит этот закон с большей точностью: так как мы имеем здесь дело с явлением, не связанным сколько-либо прямым образом с фундаментальными законами движения.

Открытие теории относительности сделало необходимой модификацию принципа простоты. Один из, по-видимому, фундаментальных законов природы – это закон тяготения, который согласно Ньютону описывается очень простым уравнением; однако согласно Эйнштейну требуется развитие чрезвычайно сложной техники, прежде чем уравнения закона тяготения можно будет хотя бы только записать. Правда, с точки зрения высшей математики, можно привести аргументы в пользу того, что закон гравитации Эйнштейна на самом деле проще закона Ньютона, но при этом придется приписать достаточно тонкий смысл самому понятию простоты, что в значительной мере разрушает практическое значение принципа простоты в качестве инструмента исследования оснований физики.

Что делает теорию относительности столь привлекательной для физиков, несмотря на то, что она противоречит принципу простоты, – это ее поразительная *математическая красота* («mathematical beauty»). Это качество поддается определению не более, чем красота в искусстве, однако обычно без труда понимается теми, кто изучает математику. Теория относительности подняла математическую красоту описания Природы на уровень, никогда прежде не достигавшийся. Частная теория изменила наши представления о пространстве и времени; эти изменения можно подытожить в утверждении, что группа преобразований, которым подчиняется пространственно-временной континуум, должна быть заменена: вместо группы Галилея мы должны рассматривать группу Лоренца. Последняя несравненно красивее, чем первая, – фактически с математической точки зрения группа Галилея – это вырожденный частный случай группы Лоренца. Общая теория относительности включает следующий шаг примерно такого же характера, хотя возрастание красоты на этот раз обычно считается меньшим, чем в случае специальной теории, вследствие чего в справедливость общей теории верят не так твердо, как в случае специальной теории.

Итак, мы видим, что должны заменить принцип простоты на *принцип математической красоты.* Исследователь, в своих усилиях выразить фундаментальные законы Природы в математической физике, должен бороться главным образом за математическую красоту. Надо по-прежнему принимать во внимание простоту, но она должна быть подчинена математической красоте. (Например, Эйнштейн, выбирая закон гравитации, взял простейший, совместимый с его пространственно-временным континуумом, и это привело его к успеху.) Часто случается, что требования простоты и красоты совпадают. Но если они сталкиваются, то следует отдавать предпочтение последним.

Перейдем ко второй революции в физической мысли нынешнего столетия – к квантовой физике. Это теория атомных явлений, основанная на механике существенно иного типа, нежели механика Ньютона. Различие можно сформулировать кратко, но в довольно абстрактном виде, сказав, что динамические переменные в квантовой механике подчиняются алгебре, в которой аксиома коммутативности умножения не выполняется. Во всем остальном существует чрезвычайно близкая формальная аналогия между квантовой механикой и старой механикой. В самом деле, воистину примечательно, насколько старая механика оказывается приспособленной к обобщению на некоммутативную алгебру. Все элегантные черты старой механики могут быть перенесены в новую, где они появляются вновь с удвоенной красотой.

Квантовая механика требует введения в физическую теорию обширной новой области чистой математики – всей области, связанной с некоммутативным умножением. Эта математика, входя в физическую науку вслед за новой геометрией, введенной теорией относительности, намечает путь, который, как мы можем ожидать, будет продолжаться. Можно надеяться, что в будущем и другие обширные области чистой математики войдут в обиход в связи с развитием фундаментальной физики.

Чистая математика и физика становятся связанными все теснее, хотя их методы и остаются различными. Можно сказать, что математик играет в игру, в которой он сам изобретает правила, в то время как физик играет в игру, правила которой предлагает Природа, однако с течением времени становится все более очевидным, что правила, которые математик находит интересными, совпадают с теми, которые избрала Природа. Трудно предсказать, каков будет результат всего этого. Возможно, оба предмета в конце концов сольются, и каждая область чистой математики будет иметь физические приложения, причем их важность в физике станет пропорциональна их интересности в математике. В настоящее время мы, конечно, еще очень далеки от этой стадии, даже по отношению к некоторым самым элементарным вопросам. Например, в физике важно лишь четырехмерное пространство, в то время как для математики пространства с иным числом измерений представляют, в сущности, равный интерес. Однако вполне может случиться, что это расхождение вызвано неполнотой сегодняшних знаний и дальнейшее развитие покажет, что четырехмерное пространство представляет с точки зрения математики гораздо больший интерес, чем все другие.

Движение математики и физики в сторону объединения снабжает физика новым мощным методом исследования основ его науки, методом, который пока не удавалось применять с успехом, но который, я чувствую это, еще докажет свое значение в будущем. Метод состоит в том, чтобы начать с выбора такой ветви математики, которая, по вашей мысли, может стать основанием новой теории. В этом выборе надо руководствоваться в сильной степени соображениями математической красоты. Вероятно, также хорошо бы отдать предпочтение такой ветви математики, которая имеет в своем основании интересную группу преобразований, потому что преобразования играют важную роль в современной физической теории; как релятивистская теория, так и квантовая, по-видимому, показывают, что значение преобразований более фундаментально, чем значение уравнений. Выбрав область математики, следует начать развивать ее в подходящих направлениях, присматриваясь одновременно к тому, как она может поддаться естественной физической интерпретации.

Таким методом воспользовался Иордан в попытке получить улучшенную квантовую механику, опираясь на алгебру с неассоциативным умножением. Попытка не была успешной, как в общем-то и следовало ожидать, если обратить внимание, что неассоциативная алгебра не принадлежит к числу красивых математических теорий и не связана ни с какой интересной теорией преобразований. Я бы предложил в качестве идеи, выглядящей более обнадеживающе для улучшения квантовой механики, взять за основу теорию функций комплексной переменной. Эта область математики исключительно красива, и группа преобразований, с которой она связана, именно группа преобразований комплексной плоскости, это та же группа, что и группа Лоренца, управляющая пространством-временем специальной теории относительности. Мы приходим таким образом к подозрению, что есть какая-то глубокая связь между теорией функций комплексной переменной и пространством-временем специальной теории относительности; разработка этой связи станет трудной целью будущих исследований.

Обсудим теперь, насколько широко простирается математическое качество Природы. По представлениям механической схемы физики или ее релятивистской модификации для полного описания Вселенной необходима не только полная система уравнений движения, но также и полный набор начальных условий, причем лишь к первым применима математическая теория. Последние же рассматриваются как лежащие вне теоретического осмысления и могут быть определены только из наблюдений. Чрезвычайная сложность Вселенной приписывается чрезвычайной сложности начальных условий, что оставляет ее вне рамок математического обсуждения.

Я нахожу такое положение в высшей мере неудовлетворительным философски, так как это противоречит всем идеям *единства Природы.* В любом случае, если математическая теория применима лишь к части описания Вселенной, эта часть должна быть резко отделена от остального. Но фактически, кажется, нет такого естественного места, где можно провести линию раздела. Являются ли такие вещи, как свойства элементарных частиц в физике, их массы, численные коэффициенты, входящие в закон сил, предметом математической теории? Согласно узкомеханистическому взгляду они должны рассматриваться как начальные условия и лежать вне математической теории. Однако поскольку все элементарные частицы принадлежат тому или другому из небольшого числа определенных типов и все члены одного типа в точности одинаковы, они должны в какой-то мере управляться математическим законом, и большинство физиков считает сейчас, что в весьма большой мере. Например, Эддингтон строил теорию, которая была призвана объяснить массы частиц. Но даже если мы предположим, что все свойства элементарных частиц определяются теорией, мы все еще не будем знать, где провести черту, потому что мы немедленно окажемся перед следующим вопросом: определяется ли относительное обилие разных химических элементов теорией? И так мы будем шаг за шагом переходить от атомных вопросов к вопросам астрономическим.

Это неудовлетворительное положение еще ухудшается, когда мы переходим к новой квантовой механике. Несмотря на близкую аналогию между квантовой механикой и старой механикой в отношении математического формализма, они решительно отличаются в смысле природы их физических выводов. В соответствии со старой механикой результат любого наблюдения полностью определен и может быть теоретически вычислен из данных начальных условий; в квантовой же механике обычно наличествует неопределенность в результате измерения, связанная с возможностью появления квантовых скачков, и самое большее, что может быть теоретически вычислено, эта вероятность любого возможного результата, который будет получен. Вопрос, какой частный результат будет получен в каждом частном случае, лежит за пределами теории. Это не может быть приписано неполноте теории, но представляет существенную черту применения формализма такого рода, как используемый в квантовой теории.

Таким образом, в соответствии с квантовой механикой для полного описания Вселенной мы нуждаемся не только в законах движения и начальных условиях, но еще и в информации о квантовых скачках всякий раз, когда они происходят. Эта последняя информация должна быть включена, наряду с начальными условиями, в ту часть описания Вселенной, которая находится вне теории.

Такое возрастание внематематической части описания Вселенной порождает философские возражения против квантовой теории и является, по моему мнению, той внутренней причиной, из-за которой некоторые физики до сих пор затрудняются принять эту механику. Квантовая механика, однако, не должна быть отброшена, во-первых, потому, что она находится в чрезвычайно широком и детальном согласии с экспериментом, и, во-вторых, потому, что неопределенность, которую она вносит в результаты эксперимента, как раз такого рода, что она философски удовлетворительна, поскольку ее следует приписать неизбежной грубости средств наблюдения, которыми мы располагаем для экспериментов на очень малых расстояниях. Но это возражение, тем не менее, указывает, что основания физики все еще далеки от своей окончательной формы.

Мы перейдем теперь к третьему великому достижению физической науки нашего столетия – к новой космологии. Возможно, что в философском смысле оно окажется еще более революционным, чем относительность или квантовая теория, хотя сейчас еще вряд ли можно увидеть все его следствия. Исходной точкой является красное смещение, наблюдаемое в спектрах отдаленных небесных тел, указывающее, что они удаляются от нас со скоростями, пропорциональными их расстояниям. Скорости наиболее удаленных тел настолько громадны, что совершенно очевидна величайшая важность этого факта, то есть ясно, что мы имеем дело здесь не с временными или локальными условиями, но с чем-то фундаментальным для всей нашей картины Вселенной.

Если мы будем возвращаться назад в прошлое, то придем ко времени около $2 \cdot 10^9$ лет тому назад, когда вся материя Вселенной была сконцентрирована в очень малом объеме. Кажется, словно в это время произошло нечто вроде взрыва, обломки которого мы все еще видим разлетающимися вовне. Эта теория была разработана Леметром, который считает, что Вселенная началась с одного очень тяжелого атома, который претерпел сильнейший радиоактивный распад и таким способом разбился на нынешнее собрание астрономических тел, испустив одновременно и космические лучи.

Такая космологическая картина приводит к предположению, что было начало времени и бессмысленно задаваться вопросом, что было до этого. Можно получить грубое представление о геометрической картине такого развития, если представить себе настоящее в виде поверхности сферы, движение в прошлое – как движение к центру сферы, а движение в будущее – как движение вовне. Тогда нет никакого предела для движения в направлении будущего, но существует очевидный предел для движения в прошлое, отвечающий тому, что мы достигнем центра сферы. Начало времени предоставляет естественную точку, от которой должно отсчитываться время любого события. Обычно это называют эпохой события. Так, настоящая эпоха – это $2 \cdot 10^9$ лет.

Теперь вернемся к вопросам динамики. Согласно новой космологии Вселенная должна была возникнуть каким-либо простым образом. Что же тогда происходит с начальными условиями, нужными для динамической теории? Попросту говоря, их вообще не может быть или они должны быть тривиальны. Мы попадаем в положение, совершенно несостоятельное с точки зрения старой динамики. Если Вселенная просто развивалась в движении, которое следовало из заданной схемы уравнений движения с тривиальными начальными условиями, то она никак не могла бы прийти к той сложной структуре, которую мы наблюдаем. Квантовая механика предлагает выход из этого затруднения. Она позволяет приписать всю сложность квантовым скачкам, которые лежат вне схемы уравнений движения. *Квантовые скачки образуют теперь ту непросчитываемую часть явлений природы, которая заменяет начальные условия старого механистического подхода.*

В связи с новой космологией стоит отметить еще одно обстоятельство. В начале времени сами законы Природы, вероятно, весьма отличались от их современного вида. Таким образом, мы должны рассматривать законы Природы как непрерывно изменяющиеся с изменением эпохи, а не как сохраняющиеся неизменными во всем пространстве-времени. Эта идея была впервые предложена Милном, который вывел ее из допущения, что Вселенная в данную эпоху, грубо говоря, всюду однородна и сферически симметрична. Я нахожу эти предположения не очень удовлетворительными, так как локальные отступления от однородности столь велики и имеют такое существенное значение для всего мира, в котором мы живем, что кажется неправдоподобным, чтобы за ними стоял принцип однородности. Далее, если уж мы считаем законы Природы зависящими от эпохи, мы должны были бы ожидать, что они зависели бы и от места в пространстве, чтобы сохранить красивую идею теории относительности о фундаментальном сходстве между пространством и временем. Это говорит против допущения Милна еще более решительно, чем простое отсутствие однородности в распределении материи.

Мы проследили основное направление развития отношения между математикой и физикой вплоть до настоящего времени и достигли той стадии, когда становится интересным предаться размышлению о будущем. Всегда существовала неудовлетворенность этим соотношением, а именно ограничением объема применимости математики к описанию физической Вселенной. Часть, в которой она неприменима, возросла с появлением квантовой механики и уменьшилась с появлением новой космологии, но она всегда оставалась.

Эта особенность в отношении между математикой и физикой настолько неудовлетворительна, что, я думаю, можно смело предсказать, что в будущем она должна исчезнуть, несмотря на разительную перемену наших обычных представлений, к которой это приведет. Это будет означать существование такой схемы, в которой все описание Вселенной имеет свое математическое выражение, и мы должны будем предположить, что лицо, обладающее полным знанием математики, сумеет вывести из нее не только астрономические данные, но также все исторические явления, имеющие место в мире, вплоть до самых тривиальных. Разумеется, фактическое выполнение таких выводов должно лежать за пределами человеческих возможностей, ибо жизнь, насколько мы ее знаем, была бы невозможна, если бы мы могли рассчитывать будущие события, однако методы выполнения таких расчетов должны быть хорошо определены. Эта схема не может подчиняться принципу простоты, так как она должна быть предельно сложной, но она может подчиняться принципу математической красоты.

Я хотел бы выдвинуть предложение, как эта схема могла бы быть реализована. Если мы выразим настоящую эпоху, $2 \cdot 10^9$ лет, в единицах времени, определенных через атомные константы, то получим число порядка 10^{39}, которое определяет настоящее в абсолютном смысле. Не может ли так случиться, что все настоящие события соответствуют свойствам этого большого числа и, даже более общо, что вся история Вселенной соответствует свойствам всей последовательности натуральных чисел? На первый взгляд кажется, что Вселенная чересчур сложна для того, чтобы такое соответствие могло иметь место. Но я думаю, что такое возражение не может выдвигаться, ибо число 10^{39} *невероятно* сложно именно потому, что оно столь огромно. У нас есть краткий способ его записи, но это не должно закрывать нам глаза на то, что оно должно иметь чрезвычайно сложные свойства.

Значит, есть возможность, что древняя мечта философов связать всю Природу со свойствами целых чисел будет когда-нибудь осуществлена. Чтобы сделать это, физика должна пройти долгий путь, устанавливая в деталях, как это соответствие должно выглядеть. Одно указание на этот путь развития кажется довольно очевидным, а именно, что изучение целых чисел в современной математике неразрывным образом связано с теорией функций комплексной переменной, которая, как мы уже видели, с большой вероятностью должна стать основой будущей физики. Разработка этой идеи приведет к связи между атомной физикой и космологией.

THE RELATION BETWEEN MATHEMATICS AND PHYSICS

P.A.M. Dirac

АКТУАЛЬНО БЕСКОНЕЧНЫЕ МНОЖЕСТВА*

П. Вопенка

За последнее столетие канторовская теория множеств заняла в математике настолько видное место, что все, относящееся к математике, автоматически с ней сопоставляется. При этом право на существование отвоевывает себе только то, что можно настолько адаптировать, чтобы результат уже допускал моделирование в канторовской теории. Канторовская теория множеств стала, таким образом, универсальным миром математики.

В настоящее время математика, опирающаяся на канторовскую теорию множеств, наталкивается, однако, на серьезные трудности, корни которых уходят как раз в саму канторовскую теорию множеств. Сегодня вместо одной универсальной теории множеств возник целый ряд таких теорий, и никто пока не может решить, которая из них настоящая. В этой ситуации напрашивается вопрос, можно ли вообще некоторую из них считать настоящей.

Ядром канторовской теории множеств, а также ее наиболее уязвимым местом являются бесконечные множества. Канторовская теория множеств – это теория актуально бесконечных множеств. Первой теорией актуально бесконечных множеств была теория Больцано. Канторовская теория является ее продолжением только отчасти. Различия между этими теориями было принято до сих пор считать недостатками, иногда даже заблуждениями больцановской теории. Мы, однако, не разделяем эту точку зрения.

Следующий ниже текст посвящен канторовской теории множеств, причем мы к ней подходим с точки зрения некоторых идей Больцано.

О канторовской теории множеств

Возможность

Первоначально возможность понималась в математике чаще всего в смысле осуществимости. Для осуществления чего бы то ни было необходимо могущество. Однако на пути к осуществлению могут встретиться такие препятствия, которые никакое могущество не сумеет преодолеть. Так, например, в классической геометрии утверждалось, что невозможны четыре взаимно перпендикулярные прямые. Такие прямые неосуществимы, поскольку на пути их осуществления стоят свойства пространства.

---

* Из дополнения к книге: Альтернативная теория множеств: Новый взгляд на бесконечность / пер. с чешского Аллы Горальчиковой. Новосибирск: Изд-во Новосибирского института математики, 2004.

Больцано понимает возможность в другом, более общем смысле. В § 14 из [2] он пишет: «То, что противоречит какой-либо чисто умозрительной истине, мы должны назвать невозможным, а возможным – то, что не находится в противоречии ни с какой умозрительной истиной».

Возможность в этом смысле слова мы бы сегодня назвали непротиворечивостью. Некоторый объект непротиворечив, если понятия, в которых он отражен в мышлении, и связи между этими понятиями не приводят к противоречию.

Таким образом, осуществимость связана с могуществом, а непротиворечивость – только с разумом.

Предмет больцановской теории множеств

Предметом больцановской теории множеств являются только существующие множества. Для того чтобы множество существовало, необходимо, чтобы существовали все его элементы, каждый в отдельности. Бесконечное множество, следовательно, актуально бесконечно.

Первой задачей, стоящей перед больцановской теорией, было доказательство существования бесконечного множества.

В реальном мире мы не находим примера актуально бесконечного множества. Чтобы указать такое множество, мы должны выйти за рамки непосредственного реального мира. Больцано поэтому прибегает к теологическим рассуждениям. Он доказывает существование определенного бесконечного множества «в мысли божией», причем способом, который не лишен привлекательности и изобретательности.

Предмет канторовской теории множеств

Предметом канторовской теории множеств являются множества, которые, с точки зрения Больцано, только возможны. Первоначальным намерением канторовской теории было изучение вообще всех возможных множеств.

Деликатный характер предмета канторовской теории множеств требует адекватного подхода к его изучению. Точнее говоря, канторовские множества следовало бы изучать средствами некоторой подходящей модальной логики.

В канторовской теории мы, тем не менее, изучаем множества не как возможные, а как существующие, что видно уже из того, что при их изучении мы руководствуемся правилами исчисления предикатов. Это, однако, означает, что исходный подход канторовской теории множеств заключается в предположении, что изучаемые множества переведены с помощью какого-то законченного акта из состояния возможности в состояние существования.

Парадокс Рассела

Предположим, что мы посредством какого-то законченного акта перевели в состояние существования некоторые множества. Рассмотрим множество *M,* элементами которого являются в точности те существующие множества, которые сами не являются своими элементами. Оказывается, что множество *M* не существует. Доказательство проводится обычным способом.

Сформулировав аккуратно приведенные выше рассуждения, мы приходим к выводу, что здесь нет абсолютно никакого противоречия. Мы только доказали, что множество *M* не существует, то есть его нет среди множеств, которые были посредством нашего акта переведены в состояние существования. Тем самым, однако, мы не доказали противоречивость множества *M*. Следовательно, нет никаких оснований возражать против утверждения, что посредством какого-либо следующего акта может быть переведено в состояние существования и это множество. Само собой разумеется, что после второго акта мы можем аналогичными рассуждениями описать множество, которое не было переведено в состояние существования и этим вторым актом. Но это уже будет какое-то другое множество, а не наше первоначальное множество *M*.

Итак, парадокс Рассела мы свели к утверждению, что посредством одного законченного акта нельзя перевести в состояние существования *все возможные* множества.

Универсум множеств

Универсум множеств образуют множества, которые были переведены в состояние существования посредством какого-то законченного акта. В канторовской теории множеств, раз мы пользуемся классическим исчислением предикатов, мы изучаем не все возможные множества вообще, а только множества из некоторого универсума множеств.

До начала нашего изучения множества существуют только в смысле возможности, но еще не в смысле существования. Их изучение начинается с того, что мы с помощью какого-то законченного акта переводим в состояние существования множества из некоторого универсума множеств. После следующего законченного акта может возникнуть более обширный универсум множеств, при этом сложение двух последовательных законченных актов мы считаем одним законченным актом.

Условием существования какого-либо множества является, само собой разумеется, существование всех его элементов, каждого в отдельности. Следовательно, некоторое множество может быть переведено в состояние существования только тогда, когда уже заранее были переведены или одновременно с ним переводятся в состояние существования все его элементы. Таким образом, универсум множеств является транзитивным по отношению к отношению принадлежности.

Осуществимые множества

То, что осуществимо, непротиворечиво. Поэтому и произвольное осуществимое множество непротиворечиво. Если некоторое множество осуществимо, то возможно посредством одного законченного акта перевести одновременно в состояние существования все его элементы.

Поскольку канторовская теория множеств предназначена для изучения как можно большего числа множеств, мы не накладываем на осуществимость множества никаких других условий, кроме двух приведенных выше, которые являются необходимыми.

Таким образом, некоторое множество осуществимо, если оно непротиворечиво и если посредством одного законченного акта возможно одновременно перевести в состояние существования все его элементы.

Если осуществимы какие-либо два множества, то мы считаем непротиворечивыми и, следовательно, осуществимыми их пересечение, разность, декартово произведение, неупорядоченную пару и т. п. Подобным же образом мы также считаем непротиворечивым и, значит, осуществимым множество, элементами которого являются в точности все множества из данного универсума множеств.

Кроме того, мы предполагаем осуществимость некоторого бесконечного множества, например множества всех натуральных чисел.

Потенциальная супербесконечность

Любое осуществимое множество можно перевести в состояние существования. Парадокс Рассела мы, напротив, сводим к утверждению, что все осуществимые множества вообще нельзя перевести в состояние существования посредством одного законченного акта. Это значит, что к области всех осуществимых множеств мы подходим так же, как математики, не признающие актуальную бесконечность, подходят, например, к области всех натуральных чисел. В этом случае все натуральные числа не могут быть созданы разом, хотя мы можем создать любое натуральное число, если, конечно, оставить без внимания связанные с этим технические трудности.

Область всех осуществимых множеств больше любой бесконечности, которую можно создать. Поэтому мы будем говорить, что она супербесконечна. Эта супербесконечность неактуальна, поскольку ее нельзя реализовать посредством никакого законченного акта, и поэтому мы ее понимаем в потенциальном смысле.

Теория множеств, усилия которой были направлены на актуализацию потенциальной бесконечности, оказалась неспособной потенциальность устранить, а смогла только переместить ее в более высокую сферу.

Предпосылки осуществимости множества всех подмножеств

Пусть X – некоторое существующее бесконечное множество. Под множеством всех подмножеств множества X мы понимаем множество, элементами которого являются в точности все осуществимые подмножества множества X. Согласно условиям, накладываемым на осуществимость множеств, любое непротиворечивое подмножество множества X осуществимо.

Итак, *P(X)* – это множество, элементами которого являются именно все непротиворечивые подмножества множества *X*.

В настоящее время нет никаких причин считать множество *P(X)* противоречивым. Проблема осуществимости множества *P(X),* однако, более сложна. Для того чтобы мы могли считать множество *P(X)* осуществимым, необходимо, чтобы все осуществимые подмножества множества *X* могли быть переведены в состояние существования одновременно посредством одного законченного акта.

Канторовская теория множества признает осуществимость множества *P(X).* Таким образом, она существенно вышла за рамки больцановской теории множеств. Одновременно Кантор прорывается через до тех пор непреодолимые границы математики, которые были очерчены геометрическим пространством. Его множества не умещаются в пространстве, и роль, которую до сего времени играло пространство, берет на себя ныне канторовская теория множеств. Все это является следствием известной теоремы Кантора, по которой множества *X* и *P(X)* имеют разную мощность.

Мы называем некоторый универсум *совершенным,* если он содержит вместе с каждым лежащим в нем множеством и все осуществимые подмножества этого множества.

Проблема актуализации супербесконечности

После того как мы уяснили себе аналогию между потенциальной бесконечностью и супербесконечностью, у нас непременно должна возникнуть мысль, что мы можем, аналогично тому, как мы пришли к понятию актуальной бесконечности, прийти к понятию актуальной супербесконечности. И если мы откровенны, то должны признать, что идея актуализации супербесконечности ничем не сумасброднее идеи актуализации бесконечности. Рассмотрим теперь более внимательно обстоятельства, при которых возможно эту идею осуществить.

Представим себе множество *V,* элементами которого являются как раз все осуществимые множества. Если множество *V* противоречиво, то мы должны отказаться от идеи актуализации супербесконечности.

Предположим, что множество *V* непротиворечиво. Чтобы мы могли перевести это множество в состояние существования, мы должны предположить, что мы настолько могущественны, что можем посредством некоторого суперакта перевести в состояние существования все его элементы. Только тогда мы можем говорить об актуализации множества *V.*

Очевидно, что даже посредством суперактов мы не можем перевести в состояние существования все непротиворечивые множества одновременно. Следовательно, место супербесконечности займет потенциальная суперсупербесконечность и мы будем продолжать процесс актуализации.

Основная гипотеза канторовской теории множеств

Мы уже знаем, что, пользуясь классическими средствами канторовской теории множеств, мы изучаем не все возможные множества, а только множества из некоторого универсума множеств. Это, однако, не означает, что мы хотим отказаться от изучения всех осуществимых множеств. Можно предполагать, что свойства области всех осуществимых множеств отражены в подходящем универсуме множеств. Такими подходящими универсумами мы считаем так называемые ZF-универсумы или GB-универсумы.

Мы говорим, что некоторый универсум множеств является ZF*'-универсумом,* если его множества удовлетворяют всем аксиомам Цермело–Френкеля.

Мы говорим, что некоторый универсум множеств – это *GB-универсум,* если он обладает следующими свойствами. Во-первых, в этом универсуме существует такое множество *V,* так называемый *носитель,* что все множества из этого универсума являются подмножествами множества *V*. Во-вторых, если мы интерпретируем элементы множества *V* как множества, а подмножества множества *V* – как классы, то удовлетворяются все аксиомы Гёделя – Бернайса.

Основную гипотезу канторовской теории множеств, состоящую в том, что существенные свойства области всех осуществимых множеств могут быть отражены в подходящих универсумах множеств, можно более точно сформулировать (в двух вариантах) следующим образом.

ZF-*вариант.* Пусть *X* – некоторое осуществимое множество. Тогда можно посредством законченного акта перевести в состояние существования совершенный ZF-универсум множеств, содержащий множество *X.*

GB-вариант. Пусть *X* – некоторое осуществимое множество. Тогда можно посредством законченного акта перевести в состояние существования совершенный GB-универсум множеств, причем множество *X* является элементом его носителя.

Может случиться, что мы придем к убеждению, что некоторое утверждение, которое нельзя доказать, исходя из аксиом ZF или GB, верно в области всех осуществимых множеств. В этом случае мы требуем, чтобы и это утверждение было справедливо в подходящем универсуме множеств.

Очевидно, что ZF-универсумы отражают свойства области всех осуществимых множеств с позиции, с которой супербесконечность мы считаем потенциальной. С другой стороны, в GB-универсумах открыт в случае необходимости и переход к актуализации супербесконечности.

GB-вариант гораздо сильнее ZF-варианта. Пусть *V* – некоторое множество, элементами которого являются в точности все множества из некоторого совершенного ZF-универсума, и пусть мы расширили этот универсум, добавив к нему множество *V* и все его осуществимые подмножества. У нас нет никаких оснований предполагать, что при этом мы получим совершенный GB-универсум множеств.

Большие мощности

Носитель совершенного GB-универсума множеств имеет недостижимую мощность. Из GB-варианта основной гипотезы вытекает, что если X – осуществимое множество, то осуществимо и некоторое множество Y, мощность которого недостижима и больше, чем мощность множества X. Следовательно, аксиома существования собственного класса недостижимых кардиналов является естественной аксиомой теории множеств Гёделя–Бернайса. Подобные рассуждения не проходят, если мы примем только ZF-вариант. Таким образом, утверждение, допускающее осуществимость произвольно больших множеств недостижимых мощностей, является следствием такого подхода к супербесконечности, при котором допустима актуализация.

Пойдем теперь дальше и попытаемся актуализировать супербесконечность. Наша первоначальная область всех бесконечных множеств, таким образом, становится некоторым Исходным множеством области бесконечных множеств, поэтому мы будем говорить, что она суперсчетна. Проследив далее эту аналогию, мы придем к заключению, что суперсчетная мощность является сильно измеримым кардиналом. Следовательно, в случае, если мы допускаем актуализацию супербесконечности, мы должны добавить к аксиомам Гёделя–Бернайса и аксиому существования сильной меры.

Наконец, пойдем еще дальше. Мы будем актуализировать супербесконечность, продолжая процесс актуализации до абсурда. Сейчас нас будет интересовать вопрос, какими дополнительными аксиомами можно охватить эту область всех псевдовозможных множеств.

Из сказанного выше вытекает, что довольно хорошо мотивировано добавление к системе GB аксиомы, по которой существует собственный класс сильно измеримых кардиналов.

Этого, однако, было бы недостаточно, поскольку эта аксиома удовлетворяется и в случае, когда приведенные выше итерации актуализации мы проводим не слишком долго. Следовательно, необходимо добавить еще некоторые другие аксиомы.

Мотивировкой для следующей аксиомы нам послужит тот факт, что при достаточном числе итераций актуализации можно описать нетривиальные эндоморфизмы области всех осуществимых множеств. Прослеживая эту идею более подробно, мы приходим к заключению, что наша новая аксиома в системе GB может быть сформулирована в следующей форме: *в каждом собственном классе, элементами которого являются отношения, существуют хотя бы два разных отношения, таких, что одно можно гомоморфно отобразить в другое.*

В случае надобности ее можно сформулировать в более сильной форме: *для любой данной мощности в каждом собственном классе, элементами которого являются отношения, существуют хотя бы два разных отношения, таких, что множество всех гомоморфизмов одного из них в другое имеет большую мощность, чем эта наперед заданная мощность.*

Кризис

Аксиомы больших мощностей не могут быть доказаны ни в системе GB, ни в системе ZF. Несмотря на это, мы привели определенные аргументы в пользу их оправданности, которые, однако, в значительной степени обусловлены тем, что в случае, если бы оказалось, что рассуждения, из которых мы исходили, неправильны, эти аргументы тут же обернулись бы против принятия этих аксиом.

Однако под вопросом оказываются не только аксиомы больших мощностей. В подобном и, собственно говоря, еще в более безвыходном положении находятся аксиома выбора, аксиома детерминированности (axiom of determinateness), гипотеза континуума и целый ряд других аксиом. Об этом мы уже упоминали во введении к нашей книге, и, поскольку речь идет о всем известном кризисе канторовской теории множеств, мы не будем на этих вопросах подробнее останавливаться.

Кризис, постигший канторовскую теорию множеств, начинает постепенно захватывать и другие математические дисциплины. Этого и следовало ожидать, поскольку эти дисциплины опирались с таким доверием на канторовскую теорию множеств, что нередко заменяли свою первоначальную проблематику проблематикой, индуцированной теорией множеств. Поиск убежища в формализме или прагматизме, хотя сам по себе и является определенным выходом из положения, не может удовлетворить всех математиков.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вопенка П.* Математика в альтернативной теории множеств. – М.: Мир, 1983.
2. *Больцано Б.* Парадоксы бесконечного. – Одесса: Mathesis, 1911.

ACTUALLY INFINITE SETS*

P. Vopenka

Over the past century, Georg Cantor's theory of sets has taken such a prominent place in mathematics that everything related to mathematics is automatically compared to it. Only that which can be adapted to such an extent that the result would allow modeling in Cantor's theory wins the right to existence. Cantor's theory of sets has thus become the universal world of mathematics.

At present, however, mathematics relying on Cantor's theory of sets runs into serious difficulties rooted precisely in Cantor's theory of sets itself. Today a host of such theories have sprung up in place of a single universal theory of sets, and no one has yet been able to decide which of them is the real one. In this situation, the question arises whether any one of them can at all be regarded as the real one.

* From the supplement to the book *Alternativnaya Teoriya Mnozhestv* (Alternative Set Theory) translated from the Czech by Alla Goralchikova.

Infinite sets are the nucleus of Cantor's theory of sets, as well as its most vulnerable spot. Cantor's theory of sets is a theory of actually infinite sets. It is Bolzano's theory that was the first theory of actually infinite sets. Cantor's theory is its continuation only in part. It has until now been common practice to regard the differences between these theories as shortcomings and sometimes even pitfalls of Bolzano's theory. We, however, do not share this point of view.

The following text deals with Cantor's theory of sets, which we approach from the viewpoint of some of Bolzano's ideas.

НАШИ АВТОРЫ

АРНОЛЬД Владимир Игоревич (1937–2010) – советский и российский математик, автор работ в области топологии, теории дифференциальных уравнений и теоретической механики, академик РАН, до последнего времени работал в Математическом институте имени В.А. Стеклова в Москве и в Университете Париж–Дофин.

ВЕКШЕНОВ Сергей Александрович – доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Российской академии образования (Москва).

ВИЗГИН Владимир Павлович – доктор физико-математических наук, профессор Института истории естествознания и техники РАН.

ВЛАДИМИРОВ Юрий Сергеевич – доктор физико-математических наук, профессор физического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова, профессор Института гравитации и космологии РУДН, академик РАЕН.

ВОПЕНКА Петр (1935–2015) – чехословацкий математик, специалист в области математической логики, анализа, топологии, теории дифференциальных уравнений, профессор Карлова университета в Праге.

ДИРАК Поль Адриен Морис (1902–1984) – английский физик-теоретик, автор релятивистских квантовых уравнений, носящих его имя, лауреат Нобелевской премии (1933 г.).

КАТАСОНОВ Владимир Николаевич – доктор философских наук, профессор, доктор богословия, заведующий кафедрой философии Общецерковной аспирантуры и докторантуры имени Святых равноапостольных Кирилла и Мефодия.

КОГАНОВ Александр Владимирович – кандидат физико-математических наук, заведующий отделом математики Научно-исследовательского института системных исследований РАН (Москва).

МИХАЙЛИЧЕНКО Геннадий Григорьевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры физики Горно-Алтайского государственного университета, академик РАЕН.

ПЕРМИНОВ Василий Яковлевич – доктор философских наук, профессор философского факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

СЕРОВАЙСКИЙ Семен Яковлевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений и теории управлений Казахского национального университета имени аль-Фараби.

ЯКОВЛЕВ Владимир Анатольевич – доктор философских наук, профессор кафедры философии естественных факультетов философского факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

МЕТАФИЗИКА

Российский университет
дружбы народов

Научный журнал

2015, № 3 (17)

Редактор *И.Л. Панкратова*
Компьютерная верстка *Н.А. Ясько*
Дизайн обложки *М.В. Рогова*

Иллюстрации к статьям *А.Т. Фоменко*

Адрес редакции:
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, 6, Москва, Россия, 117198
Сайт: http://lib.rudn.ru/37

Подписано в печать 29.09.2015 г. Формат 60×84/8.
Печать офсетная. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 20,93. Тираж 500 экз. Заказ 1275

Российский университет дружбы народов
115419, ГСП-1, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3

Типография РУДН
115419, ГСП-1, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3, тел. 952-04-41

Общие требования по оформлению статей для журнала «Метафизика»

Автор представляет после согласования с Главным редактором:

- Текст статьи до 20-40 тыс. знаков в электронном формате;
- Язык публикации – русский;
- Краткую аннотацию статьи (два–три предложения, 4-5 строк) на русском языке;
- Ключевые слова – не более 12;
- Информацию об авторе:
    - Ф.И.О. полностью, ученая степень и звание, место работы, должность, почтовый служебный адрес, контактные телефоны и адрес электронной почты.

Формат текста:

– шрифт: Times New Roman; кегль: 14; интервал: 1,5; выравнивание: по ширине;

– абзац: отступ (1,25), выбирается в меню – «Главная» – «Абзац – Первая строка – Отступ – ОК» (то есть выставляется автоматически).

✓ Шрифтовые выделения в тексте рукописи допускаются только в виде курсива.

✓ Заголовки внутри текста (название частей, подразделов) даются выделением «Ж» (полужирный).

✓ Разрядка текста, абзацы и переносы, расставленные вручную, не допускаются.

✓ Рисунки и схемы допускаются в компьютерном формате.

✓ Ссылки на литературу даются по факту со сквозной нумерацией (не по алфавиту) и оформляются в тексте арабскими цифрами, взятыми в квадратные скобки, с указанием страниц.

Например:

- На место классовой организации общества приходят «общности на основе объективно существующей опасности» [2, с. 57].
- О России начала XX века Н.А. Бердяев писал, что «постыдно лишь отрицательно определяться волей врага» [3, с. 142].

✓ Номер сноски в списке литературы дается арабскими цифрами без скобок.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Адорно Т.В.* Эстетическая теория. – М.: Республика, 2001.
2. *Бек У.* Общество риска. На пути к другому модерну. – М.: Прогресс-Традиция, 2000.
3. *Бердяев Н.А.* Судьба России. Кризис искусства. – М.: Канон +, 2004.
4. *Савичева Е.М.* Ливан и Турция: конструктивный диалог в сложной региональной обстановке // Вестник РУДН, серия «Международные отношения». – 2008. – № 4. – С. 52–62.
5. *Хабермас Ю.* Политические работы. – М.: Праксис, 2005.

✓ Примечания (если они необходимы) даются подстрочными сносками со сквозной нумерацией, выставляются автоматически.

С увеличением проводимости[1] кольца число изображений виртуальных магнитов увеличивается и они становятся «ярче»; если кольцо разрывается и тем самым прерывается ток, идущий по кольцу, то изображения всех виртуальных магнитов исчезают.

[1] Медное кольцо заменялось на серебряное.

✓ Века даются только римскими цифрами (XX век).

Редакция в случае неопубликования статьи авторские материалы не возвращает и не рецензирует.

Будем рады сотрудничеству!

Контакты:

ЮРТАЕВ Владимир Иванович, тел.: 8-910-4334697; E-mail: vyou@yandex.ru

Для заметок

Для заметок